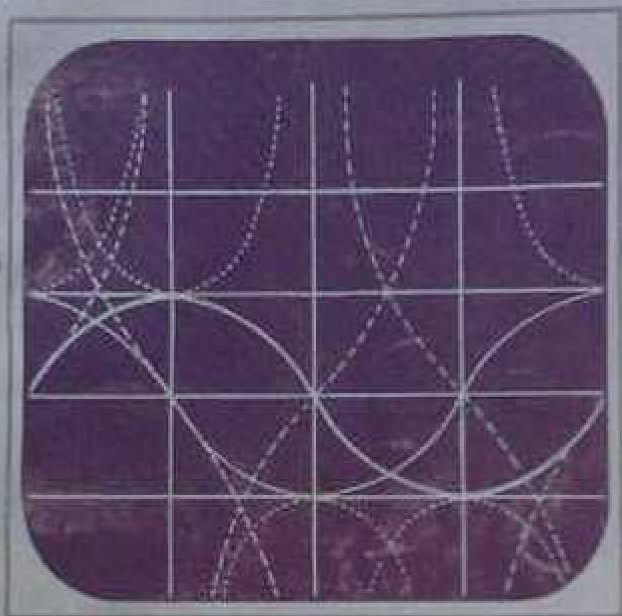










单墫 著

十个有趣的数学问题

上海教育出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

十个有趣的数学问题

单　　墫

上 海 教 育 出 版 社

十个有趣的数学问题

单　墫

上海教育出版社出版发行
（上海永福路 123 号）
（邮政编码：200031）
各地新华书店经销　　上海〇〇印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 4.75　字数 97,000
1999 年 2 月第 1 版　　1999 年 2 月第 1 次印刷
印数 1－00,000 本
ISBN 7－5320－6181－7/G·6336　　定价：0.00 元

前　言

1996年夏天，田廷彦先生约我为他们的《科学》杂志撰稿，因此写了“挂谷问题”、“十三个球的问题”等几篇文章．后来叶中豪先生又鼓励我将这些材料搜集成书，于是补充了几篇，凑成十全之数．

除去“正整数集上的库拉托夫斯基问题”一篇有一点我自己独创的工作外，其他9篇，就数学而言，都是前人已有的结果．我所作的属于普及工作，即介绍这些问题，使它们能为更多的人知道．

数学，是一门博大精深的学问．能从事一线研究的只是少数天才或准天才．但数学又是一种文化，应当使尽可能多的人了解它，对它产生兴趣，在各种不同的层次上学习数学，研究数学．就像体育运动一样，绝大多数参加体育运动的人并不想争奥运会冠军，而只是喜爱某项运动．

因此，数学的普及工作是十分有意义的．由于数学问题往往有相当的深度，所以数学的普及应当有不同的层次．层次越高，则数学内容越多．层次越低，则故事性、趣味性越强，读者面也更广泛．这里所说的层次高低，并不意味水平的高低．越通俗的报告，往往越贴近问题的实质，越需要高超的表达技巧，正如华罗庚先生所说：“深入浅出是真功夫．”

笔者从事数学普及工作多年，深感普及工作是一件吃力而不易讨好之事．这本小册子介绍的问题，大多本身饶有趣味，而且有人已经写过．笔者虽有站在前人肩上的便宜，但是

否写得更好却没有丝毫把握.

如与自己以前写的数学小册子相比,史的比重增加了,搜集了一些资料,作了一番梳理、核查工作.这也算一种新的尝试吧!

十个数学问题是什么,请读者自己看书,这里不再赘述.

单 墫

1998年于广州师范学院

计算机教育软件研究所

目　录

一、立方倍积……………………………………………… 1
二、三等分任意角 ……………………………………… 11
三、化圆为方 …………………………………………… 25
四、挂谷问题 …………………………………………… 44
五、正方体的分解 ……………………………………… 57
六、正整数集上的库拉托夫斯基问题 ………………… 62
七、能兜住地球的网兜 ………………………………… 69
八、十三个球的问题 …………………………………… 74
九、球的装箱 …………………………………………… 97
十、平面对称群………………………………………… 105
附录　看《波利亚的相册》……………………………… 130

一、立方倍积

1. 源　　起

传说在公元前四百多年，希腊的雅典发生了时疫．人们为了消除灾难，便向 Delos 的太阳神庙去求助．遵照神谕，必须把立方的祭坛增大一倍，疫病才不会流行．一位自作聪明的总设计师将祭坛的每边增大一倍，做了一个新的祭坛放在太阳神庙里，结果太阳神大怒，疫势更加猖獗．人们发现新祭坛体积是原来的八倍，而不是两倍．那么应当怎样做才符合要求呢？

这就是著名的立方倍积问题，也称为 Delos 问题．

更早一些，已有一位不出名的希腊诗人，叙述过：希腊神话中的国王米诺（Minos）要儿子格劳卡斯（Glaucus）将给他建造的坟墓增大一倍，并说："只要将每边增大一倍，就可以实现我的要求．"

这种传说大多是无稽之谈，但对于问题的传播起了推波助澜的作用．

确切的是这个问题很早就产生了，而且很多古希腊的学者，例如柏拉图（Plato，约公元前 384—约公元前 322）及其学派，都曾研究过这个问题．

2. 等价形式

立方倍积的第一个真正进展是希波克拉特（此人在化圆

为方那一章中还要说到）给出问题的一个等价形式，这种形式便于用相似三角形等方法进行讨论.

设 a 为已知立方体的边长，x 为所求立方体的边长，则

$$x^3 = 2a^3. \tag{1}$$

希腊人早就知道 x 在 a 与 $2a$ 之间，希波克拉特在 x 与 $2a$ 之间再插入一项 y，使 $a,x,y,2a$ 成等比数列，即有

$$a:x = x:y = y:2a. \tag{2}$$

反之，如有（2）成立，则

$$\frac{2a}{x} = \left(\frac{x}{a}\right)^2,$$

从而（1）成立. 所以立方倍积问题等价于在 a 与 $2a$ 之间插入两项 x,y，使 $a,x,y,2a$ 成等比数列.

3. 实际与理论

作为一个实际问题，改建祭坛的工作一点也不困难.

不妨设原祭坛边长为 $a=1$ 米（或 1 个长度单位），则新祭坛边长为 $x=\sqrt[3]{2}$ 米.

问题即如何作出 $\sqrt[3]{2}$ 米的长度. 在实际施工时，必然采取近似作法. 实际上，即使作 2 米的长度，也就是将原长度 1 米延长至 2 倍，虽然可以用圆规直尺来作，从理论上说是准确的，在操作时仍不免产生误差. 谁见过恰好长 1 米或长 2 米的线段（一点误差也没有）？

不难算出 $\sqrt[3]{2}=1.2599210\cdots$. 用 1.260 米为边作一个立方体，它的体积就是 2 米^3，误差不超过 0.1（厘米）^{3}. 即使在理论上能作出长为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段，实际施工时仍不免产生误差. 0.1 厘米的误差应当在许可范围之内. 所以采用上面的近似

值进行制作，是无可非议的.

作为一个理论问题，希腊人要求仅用圆规与直尺准确地(在理论上)作出长为$\sqrt[3]{2}$的线段，而不是长度近似于$\sqrt[3]{2}$的线段.

这里的圆规、直尺有以下功能：

1. 过两点作一条直线；

2. 以一点为圆心，过任一点画圆；

3. 在任一射线 OA 上截取线段 OB 与已知线段相等.

有限多次地使用圆规、直尺进行上述1,2,3三项作图，称为尺规作图.

希腊人为什么限定用圆规、直尺作图并将规、尺的功能限定如上呢？

一方面，规、尺是基本的作图工具，初等几何中的图形也都是由直线与圆组成的，似乎都可以通过尺规作图作出来.另一方面，希腊的学者，例如柏拉图，非常重视数学在训练智力方面的作用，限制作图工具有助于培养逻辑思维能力.欧几里得更强调从最少的基本假定(定义、公理)出发，推出尽可能多的命题.所以作图工具也相应地剩下少到不能再少的规、尺两种.

但是，尺规作图有其局限性.很多作图问题，不能用尺规作图完成，最著名的就是：立方倍积，三等分任意角，化圆为方.它们称为几何作图的三大问题.两千多年来，无数的聪明才智倾注在这几个问题之中.这几个问题，在上个世纪业已解决.1837年，汪齐尔(Pierre Laurent Wantzel，1814—1848)证明了立方倍积与三等分任意角都是不可能尺规作图的.1882年林德曼(Ferdinand Lindemann，1852—1939)证明了 π 是超越数，从而化圆为方也是不可能尺规作图的.

4. “不可能”的证明

怎样证明一个作图问题不可能用尺规作图解决呢？

古希腊人无法解决这样的问题，因为他们没有跳出初等几何的圈子.“不识庐山真面目，只缘身在此山中.”

解决这类问题的关键之一是建立几何与代数之间的联系.

1637 年，笛卡儿（René Descartes，1596—1650）发明了解析几何，其主要思想是：

1. 建立直角坐标系，使平面上的点 P 与有序实数对 (x,y) 一一对应，(x,y) 称为点 P 的坐标.

2. 建立起平面曲线与方程 $F(x,y)=0$ 的对应.特别地，直线是一次方程 $ax+by+c=0$，圆是二次方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

在立方倍积这一问题中，已知长为 1 即坐标轴上的单位，采用尺规作图，可以作出一条线段的正整数倍，又可将这线段任意等分，从而可以作出平面上所有的有理点，它们的坐标 x,y 的集合是全体有理数 $\mathbf{Q}$.

$\mathbf{Q}$ 是一个域，也就是在 $\mathbf{Q}$ 中可以进行加、减、乘、除（除数非 0），结果仍是有理数.

如果在 $\mathbf{Q}$ 中添加 $\sqrt{2}$，得出所有形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数，其中 a,b 为有理数，这添加后的集记为 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 也是域，即形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数，经加减乘除后仍在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 中，例如

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

类似地，任一个数域 K 添加一个二次无理数 α 后，得到

的集 $K(\alpha)=\{a+b\alpha:a,b\in K\}$仍然是域.

在尺规作图中,如果所有已知点的坐标都属于某个数域 K,那么任取的点,由于没有其他信息,只能假定它们都是坐标在域 K 中的点.因此,过上述点的直线或以上述点为圆心、过上述点的圆,它们的方程,系数都是域 K 中的数.直线与直线的交点,可通过解一次方程组得出,其坐标仍为域 K 中的数.直线与圆的交点或圆与圆的交点,可能过解二次方程组得出,方程组中一个方程是一次的(直线方程)或可化为有一个是一次的(由两圆方程相减产生),因此可用代入法解出,所以这些点的坐标应当在 K 或在 $K(\sqrt{a})$中,这里 a 是 K 中的一个数.

于是,从有理数域 $\mathbf{Q}$ 出发,使用尺规作图,所得的点的坐标应当在 $\mathbf{Q}$ 的一个扩域中,这个扩域 K_n 是由 $\mathbf{Q}$ 经有限多次添加形如 $\sqrt{a_j}$ 的数得出的,$a_j\in K_j$, $\sqrt{a_j}\notin K_j$, $K_{j+1}=K_j(\sqrt{a_j})(j=0,1,\cdots,n-1;K_0=\mathbf{Q})$.如果所要作的长度或所要求的点的坐标不在这种扩域中,那么尺规作图就不可能解决(笛卡儿已经知道这一点,并曾给出尺规作图不能问题的一个不够严密的证明).例如立方倍积中,$\sqrt[3]{2}$ 就不是这样的数,所以立方倍积是尺规作图不可能问题.

从直觉上看,由 Q 出发,经过有限多次开平方运算,不可能得出立方根$\sqrt[3]{2}$.但要证明这一点却并不容易.最自然的方法是用域扩张理论,即扩张次数$(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbf{Q})=3$,而对上面所说的 K_n,扩张次数$(K_n:\mathbf{Q})=2^n$.显然 $2^n\neq 3$.下面我们给出一个简单的初等证明.

设$\sqrt[3]{2}\in K_n$,而$\notin K_{n-1}$,则有 $a,b,d\in K_{n-1}$, $\sqrt{d}\notin K_{n-1}$,使

$$a+b\sqrt{d}=\sqrt[3]{2}. \tag{3}$$

立方得

$$(a+b\sqrt{d})^3=2, \tag{4}$$

即

$$a^3+3ab^2+\sqrt{d}(3a^2b+b^3d)=2. \tag{5}$$

因为$\sqrt{d}\notin K_{n-1}$,所以必有

$$\begin{cases}a^3+3ab^2=2,\\3a^2b+b^3d=0.\end{cases} \tag{6}$$

由(6)得

$$(a-b\sqrt{d})^3=2. \tag{7}$$

开立方(取实根)得

$$a-b\sqrt{d}=\sqrt[3]{2}. \tag{8}$$

由(3),(8)得$\sqrt[3]{2}=a$,即$\sqrt[3]{2}\in K_{n-1}$,这与已知矛盾.所以$\sqrt[3]{2}$不属于一切K_n.

5. 不限于尺规的作法

虽然立方倍积是尺规作图不可能问题,但不限于尺规作图,人们早已发现种种作法.下面介绍几种.

方法一　首先作两条互相垂直的直线,相交于C.分别在这两条直线上取$CA=a$,$CB=2a$.

然后用两个直角的曲尺(木工常用的工具)或三角板,使一个曲尺的一边通过B,直角顶点在直线AC上;另一个曲尺的一边通过A,直角顶点在直线BC上.移动两个曲尺(保持上述特点),直至两个曲尺有一条直角边吻合(成一条直线,如图1).这时$CX=x$,$CY=y$即为所求.

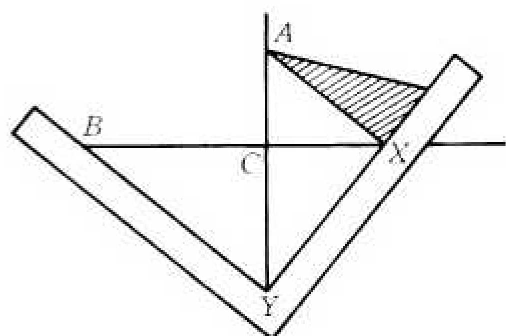


图 1

事实上，在直角三角形 BXY 中，斜边上的高 $CY=y$ 满足

$$y:2a=x:y. \tag{9}$$

而在直角三角形 AXY 中，$CX=x$ 满足

$$a:x=x:y. \tag{10}$$

(9)，(10)表明 $a,x,y,2a$ 成等比数列.

6 世纪的 Eutocins 将上述作法归之于柏拉图. 但柏拉图反对采用尺、规以外的工具，所以这一说法值得怀疑.

方法二　考虑两条轴互相垂直的抛物线 $x^2=ay$ 与 $y^2=$

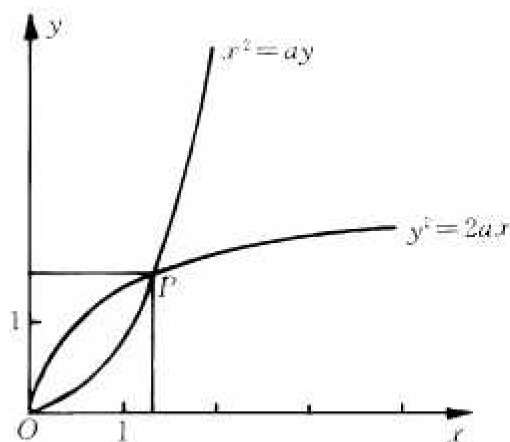


图 2

$2ax$. 设它们的(不同于原点 O 的)交点为 P,则 P 的坐标 x, y 显然满足要求.

抛物线当然无法用尺规作出,但可用机械的方法作图(它是到一定点与到一定直线距离相等的点的轨迹). 这一作法属于公元前 3 世纪的 Menaechmus. 正是由这一作法,他发现了圆锥截线(抛物线,椭圆,双曲线).

方法三　考虑抛物线 $x^2 = ay$ 与双曲线 $xy = 2a^2$ 的交点坐标. 这一作法也属于 Menaechmus.

方法四　更一般地,设 $a < b$. 我们作 x, y, 使 a, x, y, b 成等比数列.

为此,作一边在 x 轴上、一边在 y 轴上的矩形 $OABC$, O 为坐标原点, $OA = b$, $OC = a$. 再以矩形中心 E 为圆心作矩形的外接圆. 易知这圆的方程为

$$x^2 + y^2 = ay + bx. \tag{11}$$

作双曲线

$$xy = ab. \tag{12}$$

(11)与(12)的一个交点为 B, 另一个交点 P 的坐标 (x, y) 即为所求的解(令 $c = y^2 - bx$, 则由(11) $ay = x^2 + c$, 从而 $abxy = (y^2 - c)(x^2 + c) = x^2y^2 - c^2 + c(y^2 - x^2)$, 利用(12)得 c^2

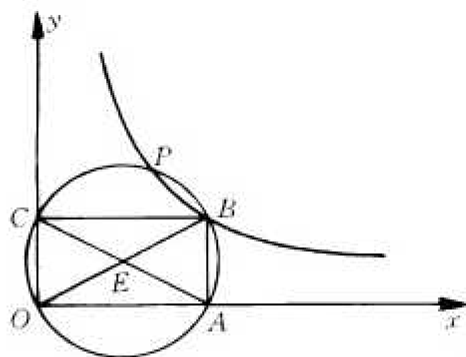


图　3

$=c(y^2-x^2)$. 若 $c=y^2-x^2$，则 $x^2=bx$，$x=b$，$y=a$. 若 $c=0$，则 $ay=x^2$，$bx=y^2$，与方法二相同).

这一作法属于苏格兰数学家格里高利(James Gregory，1638—1675)，他也是一位天文学家，由于天文观察导致眼疲劳而失明，随后不久就英年早逝. 但他的贡献极多，在数学上，研究过 $\mathrm{tg}x$ 与 $\mathrm{arctg}x$ 的台劳展开式，最先提出级数收敛与发散的区别，尝试过证明化圆为方的不可能(当时领导潮流的数学家惠更斯则认为 π 可以代数地表出). 他的著作包含无穷小分析的很多有趣的结果，并早于牛顿发现分数幂的二项式定理(但未发表). 如果天假以年，很可能在牛顿之前发明微积分. 他的侄子大卫·格里高利(David Gregory，1661—1708)也是一位数学家、天文学家，在十三个球的问题中我们要说到.

方法五　同样，设 $a<b$，我们作 x，y，使 a，x，y，b 成等比数列.

为此，先作线段 $OB=\frac{b}{2}$. 延长 OB 到 A，使 $OA=b$，以 O 为圆心过 B 作圆. 截取弦 $BC=a$. 作直线 AC，BC. 然后过 O 作直线，绕 O 转动这条直线，直至它夹在直线 AC，BC 之间的线段 $DE=OB$. 这时 OD，CE 即为所求的 x，y.

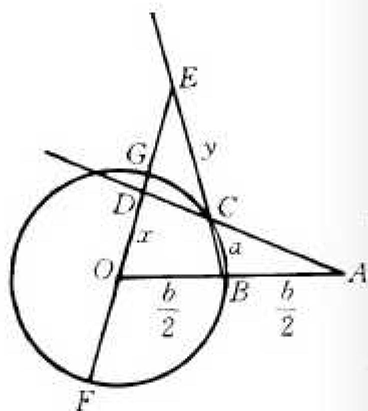


图　4

事实上，由门奈劳斯定理

$$\frac{CB}{CE}\cdot\frac{DE}{DO}\cdot\frac{AO}{AB}=1, \tag{13}$$

化简得

$$xy=ab. \tag{14}$$

另一方面，设直线 EO 交圆于 G，F，则

$$EG = EO - OG = \left(\frac{b}{2} + x\right) - \frac{b}{2} = x,$$

根据圆幂定理，

$$y(y + a) = x(x + b). \tag{15}$$

由(14)得 $\frac{b}{x} = \frac{y}{a}$，从而

$$\frac{x + b}{x} = \frac{y + a}{a}. \tag{16}$$

由(15)，(16)相乘，再约去$(y + a)(x + b)$得

$$ay = x^2. \tag{17}$$

(14)，(17)导出$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$(方法四中也可用类似解法导出此式).

这一解法属于牛顿. 图中 OE 的确定无法用尺规作图完成.

注：O 为定点，AC 为定直线，C，D，E 在一直线上，D 在 AC 上，DE = 定长$\frac{b}{2}$. 满足这些条件的点 E 的轨迹称为尼科米德(Nicomedes，约公元前 240 年)蚌线. 尼科米德曾用它与直线 BC 的交点定出 E 点，从而解决立方倍积. 牛顿方法与他的解法颇为接近，但未明显地利用蚌线.

参 考 文 献

1. 林鹤一，初等几何学作图不能问题，任诚等译，商务印书馆，1935.

2. H. Eves，数学史概论，欧阳绛译，山西人民出版社，1986.

3. 梁宗巨，世界数学史简编，辽宁人民出版社，1980.

二、三等分任意角

1. 60°的角尺规不能三等分

任给一条线段，用尺规作图，很容易将它三等分. 人们自然会想到任给一个角，能否用尺规作图将它三等分？

有一些角，例如直角，不难三等分. 也有一些角，不能尺规作图三等分，60°的角即是这样. 有了上一讲的准备，证明并不困难.

设 $\sin 20^\circ = x$，则由三倍角公式

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = 4x^3 - 3x, \tag{1}$$

即

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{2}$$

（2）没有有理根. 因为由方程论，(2)若有有理根 $\frac{p}{q}$，p，q 互质，则 q 是 x^3 的系数 8 的因数，p 是常数项 -1 的因数，易检验符合这种条件的 $\frac{p}{q}$ 均非(2)的根. 更简单的检验方法是令 $y = 2x$，化(2)为

$$y^3 - 3y - 1 = 0. \tag{3}$$

$y = \pm 1$ 都不是(3)的根，从而(3)，(2)都没有有理根.

更一般地，我们证明有理系数的三次方程

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4}$$

如果没有有理根，那么它的每一个根都不能用尺规作图作出.

事实上，如果(4)有根可用尺规作出，那么这根必属于某个域 K_n，这里 $n\geqslant 1$，$K_0=\mathbf{Q}$，$K_{j+1}=K_j(\sqrt{a_j})$，$a_j\in K_j$，$\sqrt{a_j}\notin K_j(j=0,1,\cdots,n-1)$. 在这样的根中，设 $x\in K_n$，并且 n 最小. 我们可以将 x 写成 $g+h\sqrt{a}$ 的形式，其中 $g,h\in K_{n-1}$，$a=a_{n-1}$. 将 $x=g+h\sqrt{a}$ 代入(4)得

$$g^3+3gh^2a+b(g^2+h^2a)+cg+d$$
$$+\sqrt{a}(3g^2h+h^3a+2bgh+ch)=0. \qquad (5)$$

若 $3g^2h+h^3a+2bgh+ch\neq 0$，则 $\sqrt{a}=-\dfrac{g^3+3gh^2a+b(g^2+h^2a)+cg+d}{3g^2h+h^3a+2bgh+ch}\in K_{n-1}$，与已知 $\sqrt{a}\notin K_{n-1}$矛盾. 所以由(5)得

$$\begin{cases}3g^2h+h^3a+2bgh+ch=0, & (6)\\ g^3+3gh^2a+b(g^2+h^2a)+cg+d=0, & (7)\end{cases}$$

(这也就是分开(5)中对 K_{n-1}而言的“有理部分”与“无理部分”). 从而

$$g^3+3gh^2a+b(g^2+h^2a)+cg+d$$
$$-\sqrt{a}(3g^2h+h^3a+2bgh+ch)=0, \qquad (8)$$

即 $x=g+h\sqrt{a}$ 的“共轭数”$x'=g-h\sqrt{a}$ 也是(4)的根. 由韦达定理，(4)的第三个根为

$$x''=-b-x-x'=-b-2g\in K_{n-1},$$

与 n 的最小性矛盾.

因此，(4)的每一个根都不能用尺规作图作出(更简单的证法还是用扩张次数 $(\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q})=3\neq 2^n$，这里 α 是(4)的任一个根).

我们已经知道(3)没有有理根，所以(3)的根不能用尺规作图作出. $\cos 20°$不能用尺规作出，$20°$的角当然也不能用尺规

作出，从而60°的角不能用尺规作图三等分.

2. 三等分任意角的方法

不限于尺规作图，三等分任意角的方法很多.

设$\angle AOB=\alpha$，我们先用近似的方法作出$\frac{\alpha}{3}$.

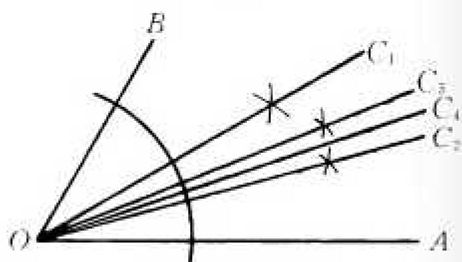


图 1

作$\angle AOB$的平分线OC_1，$\angle AOC_1=\frac{\alpha}{2}>\frac{\alpha}{3}$. 作$\angle C_1OA$的平分线$OC_2$，$\angle AOC_2=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}<\frac{\alpha}{3}$. 作$\angle C_2OC_1$的平分线$OC_3$，$\angle AOC_3=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}=\frac{3}{8}\alpha>\frac{\alpha}{3}$. 这时$\angle AOC_3$与$\frac{\alpha}{3}$的差$\frac{3}{8}\alpha-\frac{\alpha}{3}=\frac{\alpha}{24}$已经很小. 作$\angle C_2OC_3$的平分线$OC_4$，$\angle AOC_4=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}-\frac{\alpha}{16}=\frac{5}{16}\alpha$，只比$\frac{\alpha}{3}$小$\frac{\alpha}{3}-\frac{5}{16}\alpha=\frac{\alpha}{48}$. 完全可以充当$\frac{\alpha}{3}$的近似值. 如果继续作下去，从理论上说，误差越来越小（但实际作图时的误差则难于避免）.

如果允许无限多次使用圆规与直尺，那么用上面的方法可以得到一个角大小为

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}-\frac{\alpha}{16}+\frac{\alpha}{32}-\cdots=\alpha\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\alpha}{3},$$

也就是可将$\angle AOB$三等分. 但尺规作图只允许有限多次使

用圆规与直尺.

另一种近似作法是德国一位测量家发明的.这种方法可将任一角 n 等分.

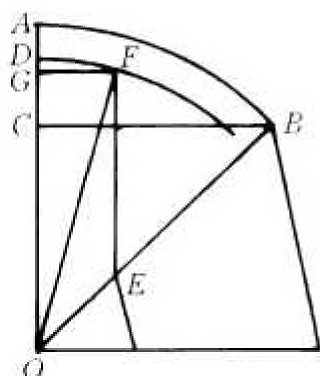


图 2

设 $\angle AOB=\alpha$ 为已知角，$OA=OB=1$. B 在 OA 上的射影为 C. 将 AC，OB 各 n 等分，$AD=\frac{1}{n}AC$，$OE=\frac{1}{n}OB$. 以 O 为心，OD 为半径画弧，过 E 作 $EF /\!/ OA$ 交所作弧于 F，则$\angle AOF$ 即为所求.

这种方法相当精确，以 $n=3$ 为例. 设 $\alpha=3\beta$，$\angle AOF=r$，则

$$FG=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}\sin\alpha,$$

$$OF=OD=OC+\frac{2}{3}CA=\cos\alpha+\frac{2}{3}(1-\cos\alpha)=\frac{1}{3}(2+\cos\alpha),$$

$$\sin\gamma=\frac{FG}{OF}=\frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}=\frac{\sin\beta(4\cos^2\beta-1)}{2+4\cos^3\beta-3\cos\beta}.$$

不妨设 $\alpha\leqslant 90°$（否则 $\frac{\alpha}{3}=30°+\frac{\alpha-90°}{3}$，用 $\alpha-90°$ 代替 α），这时 $\beta\leqslant 30°$，

$$\sin\gamma-\sin\beta=\frac{\sin\beta}{2+\cos\alpha}(4\cos^2\beta-3-4\cos^3\beta+3\cos\beta)=\frac{\sin\beta}{2+\cos\alpha}f(\beta),$$

$f(\beta)$在 $\beta=0°$ 与 $30°$ 时为 0，在 $\beta=20.8931\cdots°$时最大，最大值为 0.03230242…. 所以

$$0\leqslant\sin\gamma-\sin\beta\leqslant\frac{\frac{1}{2}}{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}\times0.03230242\cdots\leqslant0.0057.$$

这一点误差可以说是微乎其微.

下面介绍几种不限于用尺规的作法.

方法一　以 O 为心任作一圆交 $\angle AOB$ 的边 OA 于 C. 过 C 作直线交圆于 D，交 BO 延长线于 E. 转动 CE 使 DE 与圆半径相等. 这时 $\angle E$ 即为所求.

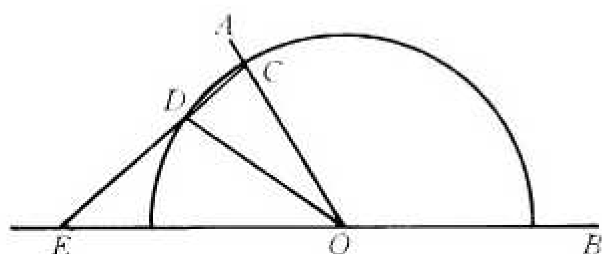


图　3

事实上，$\angle AOB=\angle E+\angle OCD=\angle E+\angle ODC=3\angle E$.

这一作法属于阿基米德(Archimedes，公元前 287—212).

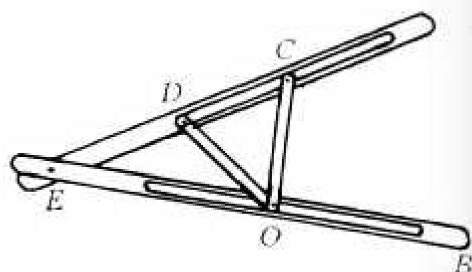


图　4

上面的作图当然不能用尺规作图完成. 但可以设计一个如图 4 所示的"三等分角仪"，它能三等分任一角. 这个三等分角仪由两根有槽的棒组成. 两根棒在 E 点相连并可绕 E 转动. D 点固定，$DE=DO=OC$，C，O 可在槽中滑动使 $\angle COB$ 等于已知角 α，这

时$\angle E=\frac{\alpha}{3}$.

方法二　作双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.设它的右顶点为 A,左焦点为 B.以 AB 为底作含角为已知角 α 的弓形弧.作 AB 的垂直平分线交弧于 O.以 O 为圆心,过 A,B 作弧.这弧交双曲线(在$\angle AOB$ 内的部分)于 D,则$\angle BOD=\frac{1}{3}\angle AOB=\frac{\alpha}{3}$.

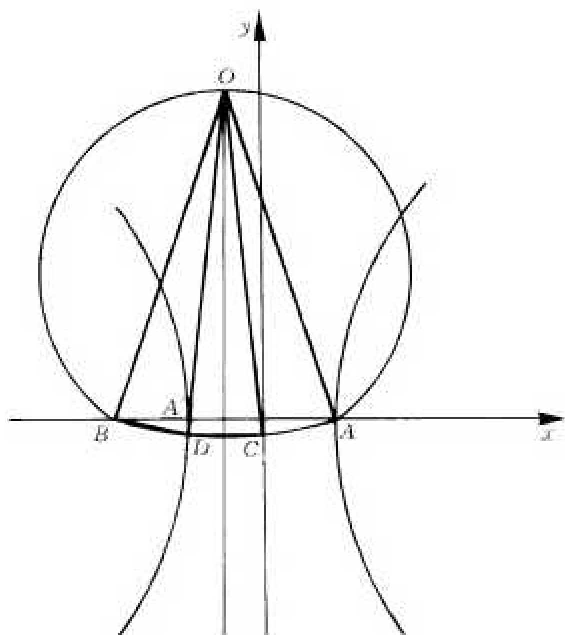


图　5

事实上,A,B 及左顶点 A'的横坐标分别为 1,-2,-1. AB 的垂直平分线即左准线$x=-\frac{1}{2}$.所以 D 的横坐标的绝对值$=\frac{1}{2}DB$(离心率$=\frac{2}{1}$).设 D 关于左准线的对称点为 C,则 $DC=DB$.三个等腰三角形 BOD,DOC,COA 全等,$\angle BOD=\frac{1}{3}\angle AOB$.

这一作法属于帕普斯(Pappus,约公元300).牛顿有一作法采用同样的双曲线,但以 AB 为底作含角为 $180° - \alpha$ 的弓形弧,与双曲线相交于 D,这时 $\angle BAD = \frac{\alpha}{3}$(若设 C 同前,则 D,C 将所作弓形弧三等分).这种作法较帕普斯的作法简单.

注意 A' 是 BA 的三等分点,但 $\angle BOA' \neq \frac{1}{3}\angle BOA$.它比 $\frac{1}{3}\angle BOA$ 要大一点.

方法三　利用上一章说过的尼科米德蚌线.

设想一列士兵,面对发令者,一齐后退 b,这时士兵所成队形就是尼科米德蚌线.

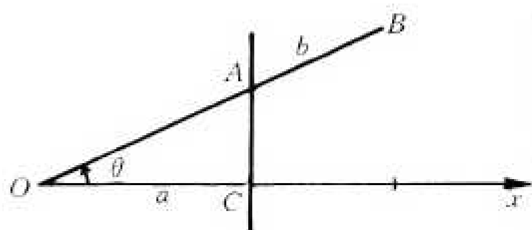


图　6

如果采用极坐标,设发令者站在极点 O.原来队列垂直于极轴,并与 O 的距离为 a,则它的方程是 $\rho = \frac{a}{\cos\theta}$.蚌线方程就是

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + b. \qquad (9)$$

它的图象如图7,很像河蚌的外壳,所以称为蚌线.

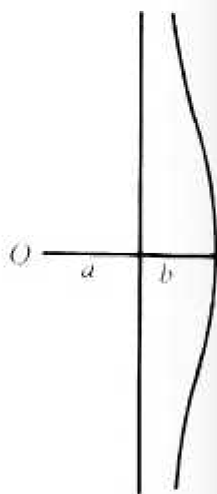


图　7

尼科米德用蚌线来三等分 $\angle AOB$.设

$\triangle AOB$ 为直角三角形(图8). $OA=a$. 取 $b=2\cdot OB$,以 O 为极,OA 为极轴作出蚌线. 过 B 作 OA 的平行线交蚌线于 F,则 $\angle AOF=\frac{1}{3}\angle AOB$.

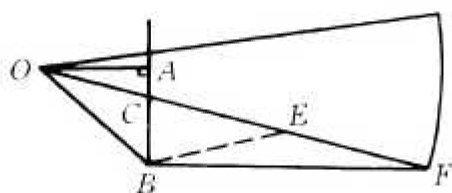


图 8

事实上,设 OF 交 AB 于 C,CF 中点为 E,则直角三角形 CBF 中,$BE=\frac{1}{2}CF=OB$,$\angle AOF=\angle OFB=\frac{1}{2}\angle BEO=\frac{1}{2}\angle BOE$,所以 $\angle AOF=\frac{1}{3}\angle AOB$.

方法四 采用帕斯加蜗线. 它的方程与(9)类似,但其中分母的 $\cos\theta$ 变成了分子:

$$\rho=a\cos\theta+b. \tag{10}$$

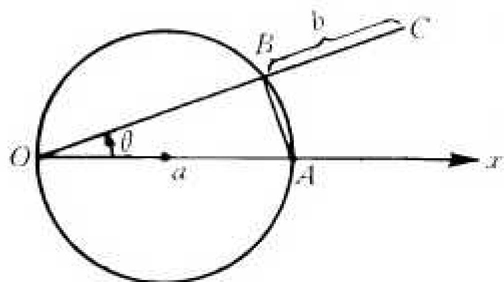


图 9

如果士兵站在圆周上,发令者也站在这个圆周上(极点 O),士兵们面向发令者,后退 b,队列就变成蜗线. 如果以过 O 的直径为 x 轴,蜗线的方程就是(10).

帕斯卡蜗线是 E·帕斯卡(Etienne Pascal)发现的. 他的儿子是著名的数学天才 B·帕斯卡(Blaise Pascal,1623—

1662). 儿子名气太大，以致许多人把父亲发现的东西也误以为是儿子发现的. 与他们同时的、也是法国的数学家 Gilles Persone de Roberval(1602—1675)将蜗线运用于三等分角(这位数学家与小帕斯卡都研究过另一种有趣的曲线——摆线):

设已知角为$\angle AOB$. 以 O 为心作圆交OA 于 A，交 OA 的反向延长线于C. 以射线 CA 为极轴，C 为极点，$a=CA$，$b=OA$ 作帕斯卡蜗线，交 OB 于B. 连 CB 交圆于D，则 $\angle OBC=\frac{1}{3}\angle AOB$($\angle AOB=\angle OCD+\angle OBC=\angle ODC+\angle OBC=3\angle OBC$).

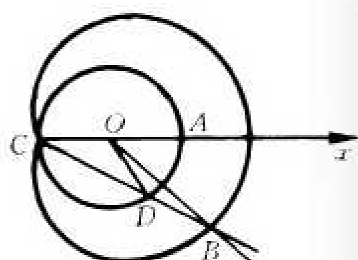


图 10

三等分任意角，这个问题本身似乎并没有十分重要的意义，但正是对它的研究促进了人们发现各种有用的曲线，如抛物线、双曲线、蚌线、蜗线等，从而产生了古希腊人的圆锥曲线论，并召唤出解析几何这门学科. 另一方面，等分角的问题对于数论研究也起了推动作用，我们将在下面说到.

3. 尺规可作哪些角

平角是 180°，直角是 90°. 将直角平分可以得出 45°的角. 作正三角形可以得出 60°的角，将它平分可以得出 30°的角. 用尺规作图还可以作出哪些角?

首先，正弦为有理数的角都可以用尺规作出. 根据前面所说当且仅当正弦值$\in K_n$ 时，角可以用尺规作出，这里 K_n 是由有理数域 $\mathbf{Q}=K_0$ 逐步扩张得到的，$K_{j+1}=K_j(\sqrt{a_j})$，$a_j\in$

K_j 而 $\sqrt{a_j} \notin K_j$，$j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 于是，一个角是否可作，只要看一看它的正弦值是否 $\in K_n$，但一个角的正弦值是否 $\in K_n$，有时并不容易判断. 我们还希望能从角本身的值进行判断，特别是形如 $\frac{b}{a} \times 180°$ 的角（这里 $\frac{b}{a}$ 为既约的正有理数）能否尺规作图？

对于互质的整数 a, b，一定存在着整数 m, n 使得

$$ma - nb = 1, \tag{11}$$

这称为裴蜀（Bezout，1730—1783）定理. 所以，如果能作 $\frac{b}{a} \times 180°$ 的角，那么也可作

$$m \times 180° - n \times \frac{b}{a} \times 180° = \frac{1}{a} \times 180°$$

的角. 反之，如果能作 $\frac{1}{a} \times 180°$ 的角，显然可作 $\frac{b}{a} \times 180°$ 的角. 于是，只需考虑能否作形如 $\frac{180°}{a}$ 的角，a 为正整数.

如果 $a = cd$，c, d 为互质的自然数，那么在 $\frac{180°}{c}$ 与 $\frac{180°}{d}$ 均可作时，$\frac{180°}{c} + \frac{180°}{d} = \frac{c+d}{a} \cdot 180°$ 可作，而最大公约数 $(c+d, c) = (c+d, d) = (c, d) = 1$，所以 $(c+d, a) = 1$，即 $c+d$ 与 a 互素. 根据上面所说，$\frac{180°}{a}$ 也可作. 反之，在 $\frac{180°}{a}$ 可作时，$\frac{180°}{c} = \frac{180°}{a} \times d$，$\frac{180°}{d} = \frac{180°}{a} \times c$ 都可作. 于是，只需考虑能否作形如 $\frac{180°}{p^\alpha}$ 的角，这里 p 为素数，α 为自然数（以下需要稍多的代数知识，读者如无兴趣可以略过不读）.

$p = 2$ 时 $\frac{180°}{p^\alpha}$ 显然可作，不必讨论. 设 p 为奇素数. 设 p

次单位根

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}} = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p},$$

则$\frac{180^\circ}{p}$的角可作也就是在复平面上可以作出 ζ. 因为 ζ 是方程

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1 = 0 \qquad (12)$$

的根，而(12)左边是 $\mathbf{Q}$ 上的既约多项式(可令 $x = y + 1$，再用著名的艾森斯坦既约判别法)，而这既约多项式的次数也就是 $\mathbf{Q}(\zeta)$(在 $\mathbf{Q}$ 中添加 ζ)对于 $\mathbf{Q}$ 的扩张次数，所以扩张次数 $(\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q}) = p - 1$.

在前面已经说过，ζ 可用尺规作图的必要条件是 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 对于 $\mathbf{Q}$ 的扩张次数为 2^n，所以 $p = 2^n + 1$，n 为自然数.

因为 n 有大于 1 的奇因数 m 时，$2^n + 1$ 被 $2^{\frac{n}{m}} + 1$ 整除，不是素数，所以 $p = 2^{2^k} + 1$，k 为自然数及零. 这样的素数称为费马(Fermat)素数.

证明$(\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q}) = p - 1$ 的另一种方法是注意(12)的根为 ζ^j，$j = 1, 2, \cdots, p - 1$. 并且由$(j, p) = 1$，根据裴蜀定理，有整数 c，d，使 $cj - dp = 1$，从而

$$(\zeta^j)^c = \zeta^{cj - dp} = \zeta.$$

即 ζ 可用 ζ^j 的多项式表出(多项式的系数在 $\mathbf{Q}$ 中). 这表明

$$\zeta \to \zeta^j$$

可产生 $\mathbf{Q}(\zeta)$到自身的同构. 于是取 $j = 1, 2, \cdots, p - 1$ 得出 $\mathbf{Q}(\zeta)$的 $p - 1$ 个自同构，这些自同构均使 $\mathbf{Q}$ 不动，根据域扩张理论即得$(\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q}) = p - 1$.

令 $\eta = e^{\frac{2\pi i}{p^2}}$，则 $p(p - 1)$个数 $\eta^j(1 \leqslant j \leqslant p^2,\ p \nmid j)$都是

$$\frac{x^{p^2}-1}{x^p-1}=0 \tag{13}$$

的根.(13)的次数为 $p(p-1)$,所以$(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q})\leqslant p(p-1)$.

又与上面相同,存在整数 c,d,使 $cj-dp^2=1$,从而

$$(\eta^j)^c=\eta^{cj-dp^2}=\eta.$$

即 $\eta\to\eta^j(1\leqslant j\leqslant p^2, p\nmid j)$可产生 $\mathbf{Q}(\eta)$的 $p(p-1)$个自同构,这些自同构使 $\mathbf{Q}$ 不动,所以$(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q})\geqslant p(p-1)$.

综合以上两方面,$(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q})=p(p-1)$.

因为奇素数 $p\neq 2$ 的整数幂,所以 η 不能用尺规作图,$\frac{180^\circ}{p^2}$的角,$\frac{180^\circ}{p^\alpha}(\alpha>1)$的角都不能用尺规作图.

于是,仅当 $n=2^\alpha\cdot p_1p_2\cdots p_t$($\alpha$ 为自然数,$p_1,\cdots,p_t$ 为不同的费马素数)时,可作$\frac{180^\circ}{n}$的角.

上述条件也是充分的.证明需要较多的数论知识.有兴趣的读者可参看[3].

高斯(C.F.Gauss,1777—1855)证明了上述结论.他在20岁时给出正17边形的作法(即作出$\frac{180^\circ}{17}$的角),并从此确定献身于数学研究.

上述的费马素数,目前只知道5个,即

$2^{2^0}+1=3$,$2^{2^1}+1=5$,$2^{2^2}+1=17$,$2^{2^3}+1=257$,$2^{2^4}+1=65537$.费马曾猜测 $2^{2^k}+1$ 永远是素数,但欧拉证明了

$$2^{2^5}+1=641\times 6700417$$

是一个合数,而且到目前为至,尚未发现 $n\geqslant 5$ 时,有 $2^{2^n}+1$ 为素数的情况.

4. 能尺规三等分的角

设给出一个度数为$\frac{m}{n}\times 180^\circ$($m,n$ 为互素的自然数)的角,能否用尺规作图将它三等分?

结论是当且仅当 $3\nmid n$ 时,可以用尺规作图将$\frac{m}{n}\times 180^\circ$的角三等分.

根据上节的讨论,只需考虑 $m=1$ 的情况.

如果 $3\nmid n$,那么根据裴蜀定理,存在正整数 c,d,使得 $cn-3d=1$. 于是

$$c\cdot 60^\circ-\frac{d\cdot 180^\circ}{n}=\frac{cn-3d}{3n}\cdot 180^\circ=\frac{60^\circ}{n}. \tag{14}$$

因为 60°可作,$\frac{180^\circ}{n}$已知,所以(14)左端可作,即$\frac{60^\circ}{n}$可作,$\frac{180^\circ}{n}$可用尺规三等分.

另一方面,如果 $3|n$,设 $n=3^\alpha k$,α,k 为自然数且$3\nmid K$. 又设 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$,$\eta=e^{\frac{2\pi i}{3n}}$,则由域扩张理论,

$$(\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q})=\varphi(n), \tag{15}$$

这里 $\varphi(n)$为欧拉函数. 同样

$$(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q})=\varphi(3n). \tag{16}$$

由(15),(16)得

$$(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q}(\eta))=(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q})/(\mathbf{Q}(\zeta):\mathbf{Q})$$
$$=\frac{\varphi(3n)}{\varphi(n)}=\frac{\varphi(3^{\alpha+1})\varphi(k)}{\varphi(3^\alpha)\varphi(k)}=\frac{3^\alpha\varphi(3)}{3^{\alpha-1}\varphi(3)}=3.$$

由于 3 不是 2 的整数幂,η 不能由 $\mathbf{Q}(\zeta)$中的数经过尺规作图得出. 这也就是说$\frac{180^\circ}{n}$不能经过尺规作图三等分.

更一般地，如果给定一角 α，我们能否用尺规作图作出角 $\beta=\frac{\alpha}{3}$？

如果 $\sin\beta$ 是有理数或有理数经过有限次加减乘除及开平方得出的数，那么 β 当然可作. 但由于已知 α，即使 $\sin\beta$ 不是上述的数，$\sin\beta$ 也未必就不可作. 这是与上节（事先不知道 $\sin3\beta$）不同的.

令 $\zeta=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$\eta=\cos\beta+i\sin\beta$，则 $\eta^3=\zeta$，所以扩张次数 $(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q}(\zeta))=3$ 或 1. 如果 $(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q}(\zeta))=1$，那么 η 可表为 ζ 的一个多项式，因而已知 ζ 时，η 可作，即此时可三等分角 α. 如果 $(\mathbf{Q}(\eta):\mathbf{Q}(\zeta))=3$，那么 $\mathbf{Q}(\zeta)$ 中的数经过有限多次有理运算及开平方不能得出 η，此时角 α 不能用尺规三等分.

参 考 文 献

1. 林鹤一，初等几何学作图不能问题，任诚等译，商务印书馆，1935.

2. E.T.Bell，数学精英，徐源译，商务印书馆，1991.

3. H. Davenport，Multiplicative Number Theory，Springer-Verlag，1980.

4. 钱曾涛，你会不会三等分一角，中国青年出版社，1964.

5. 华罗庚，三分角问题，科学通报第 2 卷第 6 期，1952.

三、化 圆 为 方

几何学起源于土地丈量.

面积最容易计算的平面图形是正方形:边长为 a 的正方形,面积是 a^2.

其他平面图形,如果能化为等积(即面积相等)的正方形,那么它的面积也就可以计算了.

“化”,这个字有种种解释.

对于古希腊的几何学家,“化”就是“画”.

画图的基本工具是直尺与圆规.

直尺可以画直线,圆规可以画圆.这是全世界通用的两种作图工具.如果有“外星人”,大概也会使用这两种工具.我国古代就有“不以规矩,不能成方圆”(《孟子》离娄章)的说法.在西汉武梁祠的壁画中就有伏羲与女娲分别执有圆规、矩尺的图(图 1).



图 1

设 F 是一个平面图形.如果可用圆规、直尺,经过有限多步作图,画出一个正方形与 F 等积,那么 F 就称为可以化方.

1. 直线形的化方

(1) 长方形

长方形可以化方.这是欧几里得的名著《原本》(约公元前300年)第二卷命题14(毫无疑问,在欧几里得之前,人们已经熟悉这一结果).作法如下:

设已知长方形 $ABCD$,延长 AD 到 E,使 $DE=DC$.以 AE 为直径作圆.延长 CD 交圆于 H,则由熟知定理,$DH^2=AD\times DE$.因此,以 DH 为边作正方形 $DFGH$,这个正方形就与长方形 $ABCD$ 等积.

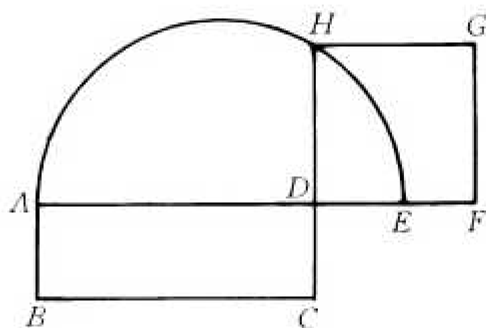


图 2

(2) 三角形

设$\triangle ABC$ 中,BC 边最大,AD 是它的高.过 AD 中点E 作 BC 的平行线,然后完成长方形 $BCFG$(图3).这个长方形就与$\triangle ABC$ 等积.

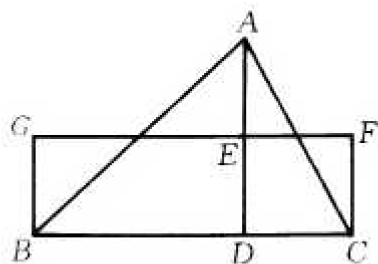


图 3

因为长方形可以化方，所以△ABC 也可以化方.

（3）凸多边形

如图4，对凸多边形 $ABCDEF$，可以过 F 作 AE 的平行线交 DE 延长线于 G. 因为△AEF 与△AEG 面积相等，所以多边形 $ABCDG$ 与原来的多边形 $ABCDEF$ 等积，而边数少1. 用这个方法可用凸多边形化为等积的三角形，从而也可以化方.

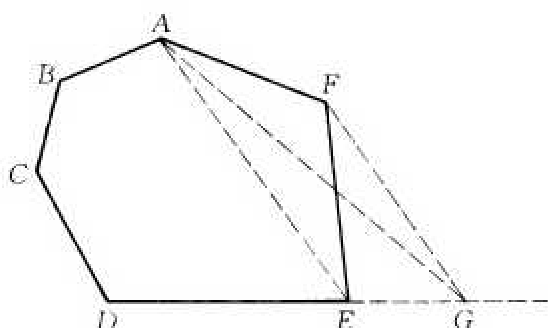
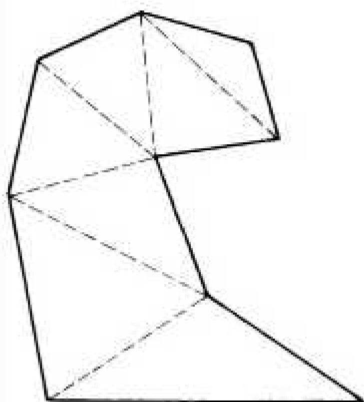


图 4

（4）凹多边形

凹多边形怎样化方呢？这有一点困难. 我们可以先用一些对角线将它分为若干个三角形. 每个三角形都可以化方. 然后将所得到的正方形“加”起来，变成一个正方形.

所谓加，我们是指用勾股定理：如图6所示，边长分别为 a，b 的两个正方形，面积之和等于边长为 c 的正方形. 这里 a，b，c 组成一个直角三角形，c 是斜边，所以 $c^2 = a^2 + b^2$（用同样方法，亦可将两个正方形“相减”，即 $b^2 = c^2 - a^2$）. 用这个方法就可以将几个正方形化为一个正方形（面积等于这几个正方形的面积的和）.


图 5

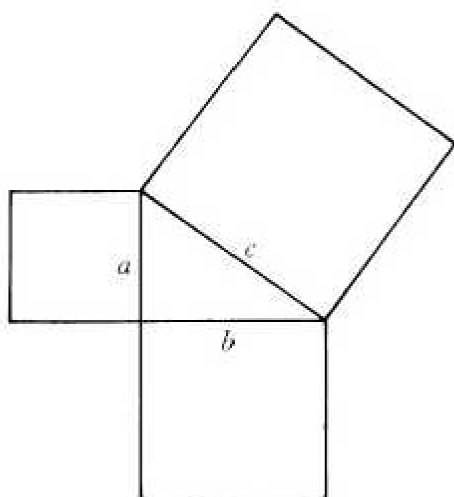


图 6

于是，一切直线围成的图形都可以化方.

接下去，很自然地，应当考虑曲线围成的图形，首先是圆，是否可以化方?

正如著名的数学评论家普罗克鲁斯(Proclus，412—485)所说：

"我相信，走到这一步后，古人也在寻求如何化圆为方.因为既然平行四边形可以化为长方形，那么圆弧围成的图形是否与长方形(面积)相等，很值得研究."

2. 圆的面积

圆面积的计算历史悠久.

公元前1700年左右，在埃及的兰德纸草(1858年冬为苏格兰考古学家兰德发现)上就已有用"直径减去$\frac{1}{9}$直径，然后平方"来计算圆面积的规则，即

$$圆面积 \approx \frac{64}{81} \times (直径)^2.$$

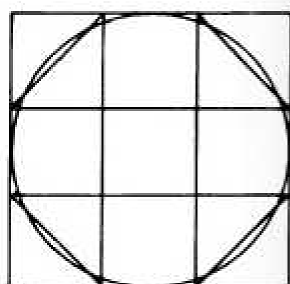


图 7

纸草上还用图 7 来说明，其中（圆的外切）正方形被分为 9 个小正方形，角上 4 个连了对角线．埃及人如何从这个图得出上述规则，不得而知．

显然，半径大的圆，面积也大．但圆的面积并不与半径成正比，而是与半径的平方成正比．这一点在欧几里得《原本》12 卷命题 2，已有证明．所用方法是欧多克斯（Eudoxus，前 400—347）的穷竭法（欧多克斯没有著作留传，但数学史家相信《原本》第 5，6，12 卷都基于他的工作）．

这个比例系数，现在用 π 表示，即

$$圆面积 = \pi \times (半径)^2.$$

π，是 1706 年 William Jones（1675—1749）在其著作《数学新导》中首先使用的．欧拉（生于 1707 年）在 1737 年也采用这一记号，并写进 1748 年出版的名著《分析引论》中，从此这一记号即为普遍接受，而且很多人误以为是欧拉首先引入的．

在兰德纸草中，实际上已有近似值

$$\pi \approx \frac{64}{81} \times 4 = 3.16\cdots.$$

现在知道

$$\pi = 3.14159265358979323846 26\cdots$$

是一个无限不循环小数．

3．近 似 作 图

圆，能否化方？

如果用$\sqrt{\pi}$为边长作正方形，那么它的面积就等于 π，也就是单位圆（半径为 1 的圆）的面积.

但是，$\sqrt{\pi}$如何用圆规直尺来作？

虽然我们可以作出$\sqrt{\pi}$的近似值，而且可以精确到任何一位小数，但近似值毕竟是近似值，从理论上讲，所作的正方形面积并不是恰好等于单位圆的面积. 所以，不能说已经解决了化单位圆为方的问题.

用尺规化圆为方的近似作图很多. 下面的一种是 1685 年 Kochansky 的作图，非常简单：

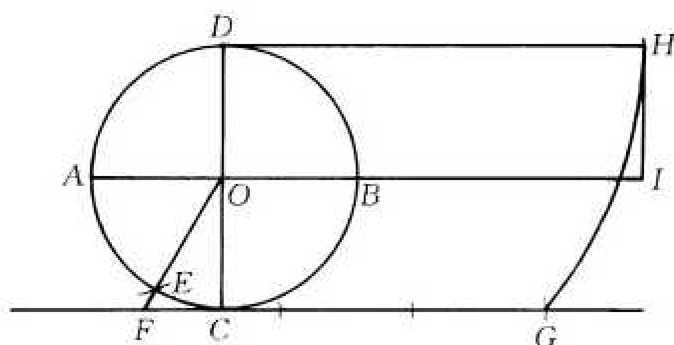


图 8

如图 8，$\odot O$ 是单位圆，AB，CD 是两条垂直的直径. 以 A 为心，1 为半径画弧交$\odot O$ 于 E，直线 OE 交 C 处的切线于 F. 在 FC 上取 G 使 $FG=3$. 以 DG 长及 1 为边作矩形 $DOIH$. 再将这个矩形化方，所得正方形的面积

$$=DG\times 1=\sqrt{CD^2+CG^2}=\sqrt{2^2+(3-FC)^2}$$

$$=\sqrt{4+\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{13\frac{1}{3}-2\sqrt{3}}=3.14153339\cdots.$$

与单位圆的面积 π 相差不到$\frac{1}{1000}$.

文艺复兴时的大师达芬奇(Leonardo da Vinci,1452—1519)还设计了一种有趣的作法:

以单位圆为底作一个高为$\frac{1}{2}$的圆柱,然后将这个圆柱在面上滚动一周,产生一个矩形,矩形的面积正好是

$$\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi,$$

即单位圆的面积,再将矩形改为等积的正方形即可.

4. 三大作图问题

在化圆为方、立方倍积、三等分一角这三大作图问题中,化圆为方出现最早,而解决则最晚.

不知最初是谁,也不知何时何地提出这一问题.但它的出现不晚于公元前5世纪(而且在历史上,未必按照逻辑的顺序出现在直线形化方之后.前面所引普罗克鲁斯的话,他说"我相信",这正表明他没有任何证据),至少有以下两件事支持此说.

希腊著名剧作家阿里斯托芬斯(Aristophanes,前448?—380?)的喜剧《鸟》(公元前414年上演)中,有一位自封的鹊云岛的测绘员,说了这么一段台词:

"如果我将这尺从上面放下去,再这样插进一个圆规,你看见吗?如此这般,我就将圆化为方了."

可见当时化圆为方已经流行,而且自称能够解决这一问题的人已成为嘲讽的对象.

又据公元2世纪的数学史家Plutarch说,公元前5世纪中叶,哲学家亚拿萨哥拉(Anaxagoras,前500?—428)在狱中研究化圆为方.亚拿萨哥拉自Ionia(现属土耳其)来到雅典,

他继承了希腊七贤台利斯(Thales,前 640?—546)等人的传统,用理性的精神探索自然的奥秘.例如他认为太阳不是神,而是一块巨大的、红、热的石头,月亮的光借自太阳等等.这种自由质疑的大胆言论与占统治地位的僵死教条发生冲突,结果亚拿萨哥拉被投入监狱.幸而当时的统治者培里克里斯(Pericles,前?—429)是他的学生,后来将他释放.亚拿萨哥拉如何研究化圆为方,没有留下任何记录.培里克里斯在亚拿萨哥拉前一年死,那一年雅典瘟疫流行,居民死去四分之一.据说,雅典人派代表团去 Delos 的太阳神庙询问瘟疫何时才能平息?回答是应当将神坛(立方体)的体积放大 1 倍.这就是著名的"立方倍积"问题(参见第一章).另一著名的作图问题"三等分任意角",也产生于同一时期.

这尺规作图的三大问题,延续 2000 多年,才被解决.答案均是否定的,即这三大问题用尺规作图均不可能完成.

5. 希波克拉底

或许会有人认为曲线围成的图形均不能化方.但这种观点是错误的.

希波克拉底(Hippocrates of Chios,前 460—380)成功地将一些圆弧围成的月形化方.

希波克拉底,出生于 Chios 岛.这是希腊人常用的名字.在同一时期,邻近的 Cos 岛上也有一个希波克拉底(前 460? —377),是希腊医生,后来被誉为"医药之父".为了区别起见,分别称之为 Hippocrates of Chios 与 Hippocrates of Cos.我们只谈前一个希波克拉底.

Chios 岛距毕达哥拉斯(Pythagoras,约前 560—480)的

诞生地 Samos 很近.很可能，希波克拉底早就受到毕达哥拉斯学派的影响.希波克拉底，原本是一个商人.但据亚里士多德(Aristotle，前 384—322)说，他并不是一个精明的商人.他的船在 Samian 战争中被海盗所劫.于是他到雅典去控告这些海盗(其结果如何，不得而知)，并在那里住了很久.他在雅典与哲学家们结交，研究并教授几何，成为公元前 5 世纪时领头的数学家，并使雅典在希腊数学研究中居领先地位.他致力于三大问题中的化圆为方与立方倍积，得出卓越的结果.虽然他(如阿里斯多德所说)并没有能化圆为方，但他将某些月形化为三角形.证明了曲边图形能否与直线形有相同的面积.他还将立方倍积问题化为求 a 与 $2a$ 之间的两个比例中项(即 $a:x=x:y=y:2a$).在立方倍积的研究中，他引入了几何学中的分析法：先假设所要找的东西存在.他还设法将几何定理编排成序，并写成教科书《几何原本》，但早已失传.这一工作是后来欧几里得《原本》的嚆矢.

6. 亚历山大的说法

对希波克拉底化圆为方的研究，有两种不同的说法.一种属于公元 3 世纪的亚历山大(Alexandor of Aphrodisias).他的说法如下：

如图 9，设 AB 是半圆的直径，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点.分别以 AC，BC 为直径向外作半圆.由于 $AB^2=AC^2+BC^2$，所以以 AB 为直径的半圆面积等于两个小的半圆的和.去掉公

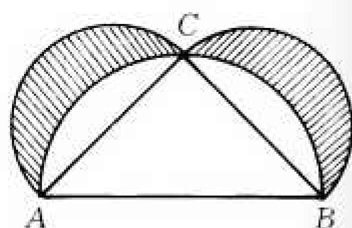


图 9

共部分，便得到

两个月形（图中阴影部分）的面积 = $\triangle ABC$ 的面积.

这样，希波克拉底便成功地将圆弧围成的月形（被称为希波克拉底镰刀）化为面积相等的直线形.

传说，希波克拉底解决了化圆为方.怎么会产生这一说法呢？亚历山大认为希波克拉底可能是这样做的：

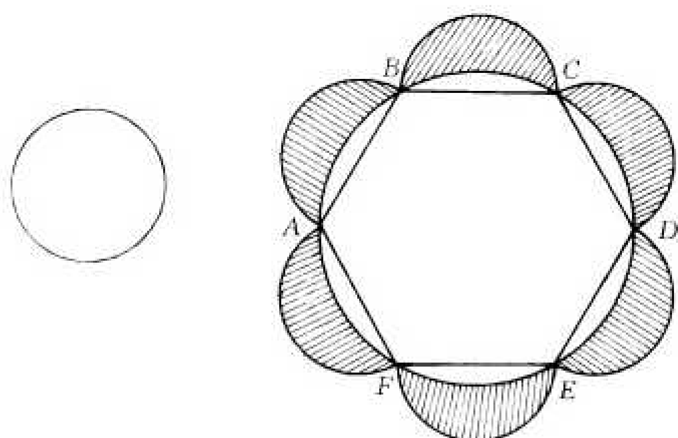


图　10

如图 10，作一个圆，半径为左边的已知圆的两倍.再作它的内接正六边形（即从圆周上一点 A 开始，在圆周上顺次取 B，C，D，E，F，使 $AB = BC = CD = DE = EF =$ 这圆半径），在每条边上向外作半圆，两个半圆正好是一个已知圆.所以

六边形面积 + 3 个已知圆的面积

= 大圆面积 + 6 个月形（阴影部分）面积.

因为大圆面积等于 4 个小圆面积，所以从上式得出：

1 个已知圆 = 六边形面积减去 6 个月形的面积.

既然六边形可以化方，月形也可以化方，它们的差也就可以化方，即已知圆可以化方.

这一推理中有一处明显的错误.前面所说的月形(希波克拉特镰刀)与这里的月形并不是同一个东西.前者作在圆内接正方形的边上,这里则作在圆内接正六边形的边上.两者岂可混为一谈!希波克拉底是一位杰出的数学家,不至于犯这样低级的错误.所以下节有另一种说法.

7. 辛姆普立斯的说法

公元6世纪的辛姆普立斯(Simplus,他是亚里士多德的著作的评注者)不同意亚历山大的说法.他援引欧德默斯(Eudemus of Rhodes,生于公元前320年,亚里士多德的学生)的《几何史》(此书业已失传,在普罗克鲁斯的著作中可以见到一些片断).据他自称是逐字逐句地引用.他的(或许是欧德默斯的)说法如下:

希波克拉底并非只考虑一种月形,而是考虑了四种月形.

(Ⅰ)如图11,△ABC是等腰直角三角形.以AB为直径的半圆与AC,BC形成两个弓形.这与图9相同.所不同的是现在以AB为底作一个弓形,与上述两个弓形相似(这只要所作圆弧与AC,BC相切即可.因为此时$\overset{\frown}{AB}$所含角与$\overset{\frown}{AC}$所含角均为$45°\times 2$.弧所含角相等时两个弓形即相似).相似弓形的面积与底长平方成正比.因为$AB^2=AC^2+BC^2$,所以

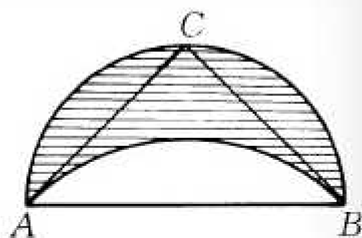


图 11

弓形AB的面积=弓形AC与弓形BC面积之和.

从而图中两条圆弧所围的月形(图中阴影部分)面积等于△ABC的面积,因而可以化方.

现在的月形实质上是图 9 的每个月形的 2 倍.

(Ⅱ)如图 12,用圆规直尺可作出一个梯形 $ABCD$,$BA = AD = DC$,而下底 $BC = \sqrt{3}\,AD$(底角≈68.529°).梯形的外接圆与 BA,AD,DC 形成 3 个弓形.同(Ⅰ),以 BC 为底作一弓形与 $ABBA$ 相似(图 13).因为 $BC^2 = 3BA^2$,所以

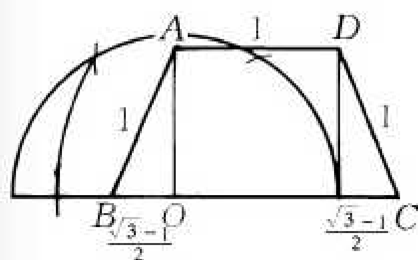


图 12

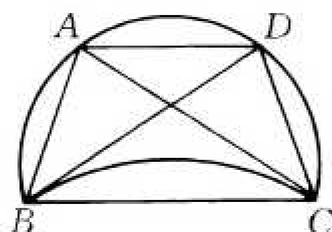


图 13

弓形 BC 的面积 = 3 个小弓形面积之和.

从而两圆弧所夹月形面积 = 梯形 $ABCD$ 的面积.这种月形也可以化方.

(Ⅲ)如图 14,梯形 $ABCD$ 中,$BA = AD = DC$,对角线相交于 E 并且 $BE = EC$,$BE^2 : BA^2 = 3:2$.梯形外接圆与 $\triangle BCE$ 的外接圆围成月形.因为弓形 BE 与弓形 EC 之和等于三个弓形 BA,AD,DC 之和,所以月形面积等于梯形 $ABCD$ 减去 $\triangle BCE$ 的面积.

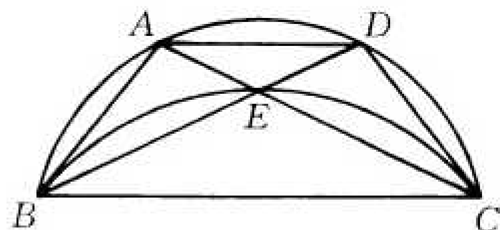


图 14

"（Ⅰ）中外面的弧正好为半圆，（Ⅱ）中外面的弧大于半圆，（Ⅲ）中外面的弧小于半圆，"欧德默斯评论说，"这样，希波克拉底就将所有的月形化方了."

欧德默斯这句话，又犯了以偏代全的错误. 上面三种月形并非所有的月形.

不过，接下去欧德默斯说："……他又将月形与一个圆一起化方，"这句话倒完全正确，这就是下面的（Ⅳ）.

（Ⅳ）图 15 左边是半圆及圆内接正六边形的一半. 不妨标出 $BD:AD=\sqrt{3}:1$. 在 BD 上作弓形与弓形 BA 相似. 这样，

弓形 BD 的面积 $=3$ 个弓形 BA，AD，DC 面积之和.

从而

$\triangle ABC$ 的面积 $=$ 月形面积 $+1$ 个小弓形的面积.

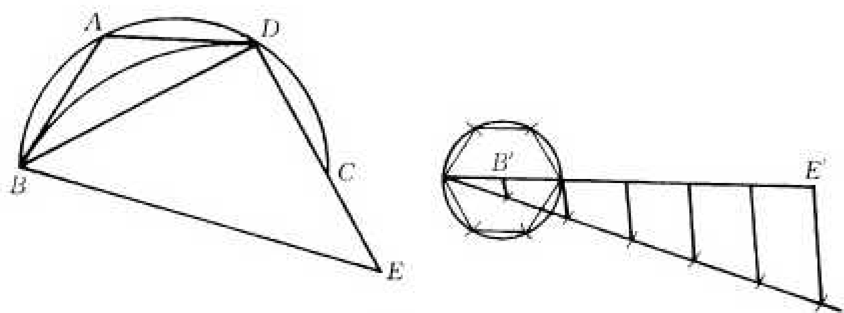


图 15

再作一个小圆，其半径为左边圆的 $\frac{1}{\sqrt{6}}$（以 BD 为腰作等腰直角三角形 BDE，则 $BE=\sqrt{6}AD$. 将 BE 六等分即得到 $\frac{1}{\sqrt{6}}AD$）. 作这小圆的内接正六边形，形成 6 个更小的弓形. 原来左边的 1 个小弓形是 6 个更小弓形面积的和，于是

$\triangle ABC$ 的面积 $=$ 月形面积 $+$ 小圆面积 $-$ 小圆内接正六边形面积.

因为三角形、正六边形均可化方，从而月形与小圆合在一起可以化方.

所以希波克拉底并未解决化圆为方的问题，而是将圆与一个月形一起化方.这样，问题就归结为一种特殊的月形能否化方.

（Ⅳ）与前面亚历山大的说法并无实质差别.但引出的结论却有不同.一说希波克拉底自以为已经化圆为方，另一则认为希波克拉底本人并未这样说，而是别人的误传.辛姆普立斯认为更应当相信欧德默斯的话，因为他生活的时代在亚历山大之前，更接近希波克拉底的时代，因而可靠性更大一些.

8. 斜　放　法

上节还有一个问题，就是希波克拉底的几种月形，本身能否用圆规、直尺作出？

（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅳ）都是没有问题的.只有（Ⅲ），其中的梯形 $ABCD$ 并不易作（如果设 $\angle DBC=\angle ABD=\theta$，那么由 $BE^2:BA^2=3:2$ 得 $\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.因而 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{22}}{8}$，$\theta\approx 26.8°$.用尺规可作出 $\cos\theta$，从而得到 θ.但古希腊人并不是这样作的）.

希波克拉底的作法如下：

先作出 AD，延长至 H，使 $DH=AD$（图 16）.以 AD 为直径作半圆，又作 AD 的垂直平分线 GF.然后，**斜放直尺**，使它在直线 GF 与圆周之间的长 $CE=\sqrt{\frac{3}{2}}AD$（这长

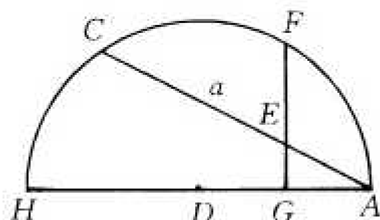


图　16

度是$\frac{1}{2}AD$与$3AD$的比例中项，不难用尺规作出）. 定出C，E后，图14中的B自不难作出（在DE延长线上取B，使$EB=EC$）.

希波克拉底称上述技术为“neusis”，即“斜放法”. 用直尺并在上面标出定长a，经过转动不难完成所述作图. 希波克拉底本人多次运用这一方法. 在他后一个半世纪的阿基米德也经常使用. 这一方法虽然不是规范的基本尺规作图，但它可以用基本的尺规作图来完成.

实际上，如果要使CE为定长a，我们设$AE=x$，那么由于G，E，C，H共圆，所以

$$x(x+a)=AG\times AH=\text{定值 } b^2.$$

从而

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}.$$

x可用尺规作出，所以E，C诸点可以定出.

看来，古希腊人知道“斜放法”可用尺规作图完成，所以他们大胆地、毫无顾虑地使用这一技术.

9. 可作与不可作

三大作图问题经过2000多年的尝试，无人成功. 于是，有人怀疑这是不可能的问题. 由解析几何，不难得知尺规所能作的量仅仅是由已知量经有限多次有理运算（即加减乘除）及开平方得出的量（如上节的x）. 而运用域扩张的伽罗华理论不难证明立方倍积与三等分任意角均为不可能. 剩下化圆为方问题，其核心问题即在π是否能从有理数经过有限多次有理

运算与开平方得出？

1668 年，James Gregory 企图证明化圆为方不可能，但未成功.

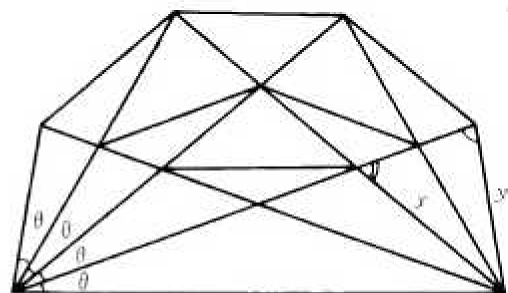
1761 年，Lambert 证明若 $x\neq 0$ 为有理数，则 e^x 与 $\mathrm{tg}\,x$ 均为无理数. 由于 $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}=1$ 为有理数，所以 $\frac{\pi}{4}$，π 都是无理数. 但 π 是否能由有理数经有限多次有理运算及开平方得出仍为未知.

化圆为方，到 18 世纪，看来已是一个不可能的问题，但仍有不少人去做. 当然结果都是失败，或者自以为成功了，然而通不过严格的审查. 由于这样的谬误文章太多，1775 年巴黎科学院不得不作出决定，不再审核化圆为方、三等分角、立方倍积及永动机的"论文".

1882 年，Ferdinand Lindemann 证明了 π 不是代数数，即 π 不是一个整系数代数方程的根，从而更不可能由有理数经过有限次有理运算与开平方得出. 这就证明了用尺规作图化圆为方是不可能的.

由此可见，月形也不都是可以化方的. 例如上节(Ⅳ)中的月形即不可以化方.

另一方面，按照希波克拉底的思路，如图 17，取一个适当



$m=5\quad n=3$

图 17

的角 θ，可以得出一个月形，外面的弧由 m 个弓形的弧组成，每个弓形的底长为 y；里面的弧由 n 个弓形的弧组成，每个弓形的底长为 x，这里

$$x^2 : y^2 = m : n. \tag{1}$$

这样的月形，记为(m,n). 希波克拉底所作的(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)三种月形即$(1,2)$，$(1,3)$与$(2,3)$. 它们均可用尺规作图作出.

究竟有哪些月形(m,n)可用尺规作图作出？这又是一个有趣的问题. 据 T.L.Heath 的《希腊数学史》所说：

1766 年 Wallenius 作出$(1,5)$；

1890 年 Clausen 作出$(3,5)$.

又有一种说法是 1771 年欧拉作出这两种月形. 因手头无欧拉全集，无法核实. 不过这两种情况均很容易. 因为由正弦定理(参看图 17)

$$\frac{x}{\sin m\theta} = \frac{y}{\sin n\theta}. \tag{2}$$

由(1)，(2)消去 x, y 得

$$\frac{\sin m\theta}{\sin n\theta} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}. \tag{3}$$

在上述两种情况($(m,n)=(1,5)$与$(m,n)=(3,5)$)中，容易得出

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 4\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 1 = \sqrt{5},$$

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin 3\theta} = \frac{4\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 1}{2\cos 2\theta + 1} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

问题即化为 $\cos 2\theta$ 的二次方程，因而 $\cos 2\theta$ 可解，2θ，θ 均可作出(第 7 节图 14 的 θ 亦可用此法作出).

这样，有五种月形可用尺规作出，其他呢？

又过了很多年，E. Landau 在 1903 年证明当 p 是素数，但不是费马素数（即 $2^{2^k}+1$ 形素数）时$(1,p)$不可作. 1929 年，保加利亚数学家 Tschakaloff 将这推广为(n,p)不可作，$n=1,2,\cdots,p-1$.

Wagner 进一步指出即使 p 是费马素数，但不是 2，3，5，那么$(1,p)$也不可作.

1934 年，N. G. Tschebotaröw 解决 $m-n$ 为偶数的情况. 在他去世前不久，他的学生 A. W. Dorodnow（1947 年）才证明除了上述五种月形. 其他的(m,n)形月形均不可用尺规作出.

10. 现代的化圆为方

现代的化圆为方是波兰数学家塔斯基（A. Tarski，1902—1983）在 1925 年提出的. 问题如下：

平面上的圆盘（圆周及其内部）能否与一个正方形组成相等？

这里组成相等的意思是：如果集 A 能分成有限多个互不相交的集 A_i，这些 A_i 各经过一个运动后组成集 B，那么就称 A 与 B 组成相等.

与古典的化圆为方大不相同. 第一，这里的集 A_i 是任意点集，不一定像三角形、多边形或弓形那样形成一个完整的"块"，A_i 可以不连通，甚至"没有面积"（不可测）. 第二，不需要将这些集作出来，更不必限用圆规、直尺将它们作出来.

塔斯基在 1925 年就知道比单位圆面积小的正方形及比单位圆面积大的正方形都不可能与单位圆组成相等（由于 A_i

是任意的集，这一点并非显然．在三维空间中就有与平面迥然不同的结果，即著名的 Banach - Tarski 悖论：三维空间中任意两个立体组成相等．这就是一个小小的弹丸与庞大的太阳组成相等!)．但面积与单位圆相等的正方形是否与单位圆组成相等呢？

这一现代的化圆为方延续了 65 年，直至 1990 年才被匈牙利数学家 M. Laczkovich 解决．他证明了面积相等的圆与正方形组成相等，而且单位圆所分成的集 A_i 只需经过平移就可以组成正方形．

参 考 文 献

1. W. W. R. Ball, Mathematical Recreations and Essays, University of Toronto Press, 1974.

2. Carl B. Boger, A History of Mathematics, John Wiley & Sons, 2nd edition, 1989.

3. Ronald Calinger (editor), Classics of Mathematics, Prentice Hall, 1995.

4. Wilbur Richard Knorr, The Ancient Tradition of Geometric Problems, Birkhäuser Boston, 1986.

5. 单墫，组合几何，上海教育出版社，1996.

四、挂谷问题

1. 有趣的问题

在数学中，有时提出一个问题远比解决一个问题重要.

一个好的问题可以吸引很多人去研究，去探讨，从而创造出新的方法，新的理论，甚至开拓出全新的领域（前几年解决的 Fermat 大定理就是这样的问题）.

1917 年，日本的挂谷（Kakeya）宗一提出了一个十分有趣的问题：

"一位武士，在上厕所时遭到敌人袭击. 矢石如雨，而他只有一根短棒. 为了挡住射击，需要将棒旋转一周（360°）. 但厕所很小，因此在转动短棒时，应当使短棒扫过的面积尽可能小. 面积可以小到多少？"

换成更数学化的说法，挂谷问题就是：

如何将长为 1 的线段转过 180°（或 360°，这两者并无实质的不同），使这线段扫过的面积为最小？

这个问题立即吸引了众多数学家与数学爱好者的注意. 1925 年，当时的数学大家伯考夫[①]在他的著作《相对论的源来、性质与影响》中写到一些未解决的问题. 他首先提到四色定理，接着就说"近几年日本数学家挂谷提出的问题，是同样令人感兴趣的简明问题."

---

① 伯考夫（G. D. Birkoff，1884—1944），是 20 世纪初期美国数学的代表，曾解决庞加莱关于三体问题的几何定理（1913 年），建立强形式的遍历定理（1931 年）. Birkoff 的读音是[bəːkɔf]，所以不应当译成伯克霍夫.

很显然，如果棒绕它的一端旋转半周，这时棒扫过的面积是$\frac{\pi}{2}=1.57\cdots$（图 1 的半圆），这个值当然太大，如果圆心上移，面积就可以减少. 设圆心距一端为 a，则距另一端为 $1-a$，绕圆心旋转半周将形成两个半圆（图 2），面积的和是 $\pi(a^2+(1-a)^2)$，易知在 $a=\frac{1}{2}$时，取得最小值$\frac{\pi}{4}=0.785\cdots$. 这时，两个半圆恰好合成一个整圆（图 3）.

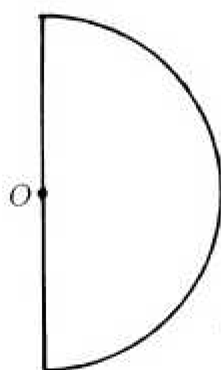


图 1

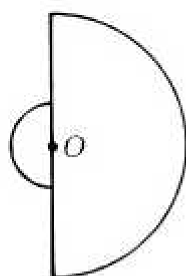


图 2

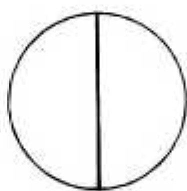


图 3

$\frac{\pi}{4}$还可以用更小的值代替. 考虑一个高为 1（即边长为$\frac{2}{\sqrt{3}}$）的正三角形 ABC（图 4）. 棒起初在 AB 边上，一端在 A. 绕 A 旋转 60°到 AC 边上. 将棒沿 AC 移动直到 C 为棒的一端. 再绕 C 旋转 60°到 CB. 同样，将棒的端点移到 B，绕 B 旋转 60°. 这样棒就转过 $60°\times3=180°$，转过的面积（即$\triangle ABC$的面积）是$\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577\cdots$. 这个值又小了一点.

图 4 有两点值得注意：

1．旋转中心不是一个，而是3个．因此，如果增加旋转中心有可能使扫过的面积减少．

2．棒沿所在直线移动时，不增加面积．

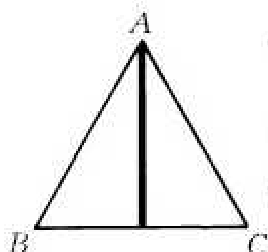


图 4

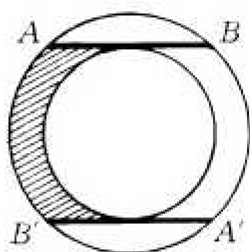


图 5

于是，如图5，圆环内若有一条长为1的弦 AB 与内圆相切，则 AB 可旋转 π（180°）到 $A'B'$，而且 AB 始终在环内，不经过环中阴影部分，设外圆半径为 R，内圆半径为 r，容易知道，环面积为

$$\pi(R^2-r^2)=\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}.$$

因此 AB 扫过的面积小于$\frac{\pi}{4}$而大于$\frac{\pi}{8}$.

如果将 AB 限制在半个圆环内，那么它可以转到图6中的 $A'B'$．这时转过的角不到 π．但我们可以将棒 $A'B'$ 沿所在直线滑动，直至棒的端点 A' 移至图6中直线 AB 与 $A'B'$ 的交点 C，再绕 C 旋转 $\angle B'CA=2\phi$，最后沿直线 CA 移动与 AB 重合．这样，棒正好转过 π（原来与 A 重合的一端现在与 B 重合）．

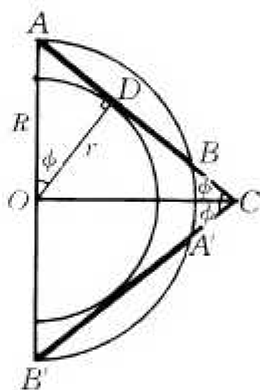


图 6

现在来算一算图6中棒扫过的面积.

设外圆半径为 R，内圆半径为 r，则 $R^2=r^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$，

$$\cos\phi=\cos\angle AOD=\frac{OD}{OA}=\frac{r}{R}.$$

扫过面积大约是半个圆环加上一个圆心角为 2ϕ 的扇形，即

$$S=\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}\times1^2+2\phi=\frac{1}{8}\pi+\phi.$$

令 $r\to+\infty$，则 $\cos\phi=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+\frac{1}{4}}}\to1,\phi\to0,S\to\dfrac{1}{8}\pi$.

因此，当内圆半径 r 无限增大（外圆半径 $R=\sqrt{r^2+\frac{1}{4}}$）时，棒扫过的面积无限趋近于 $\frac{\pi}{8}$.

能不能使棒扫过的面积恰好等于 $\frac{\pi}{8}$ 呢？

能. 挂谷本人就曾考虑过图7所示的内摆线. 内摆线也称为圆内旋轮线，即一个小圆在大圆内滚动，并与大圆保持相切，小圆上一点所走过的轨迹. 在小圆半径为大圆半径 $\frac{1}{3}$ 时，就得到有三个尖点的内摆线，即图7.

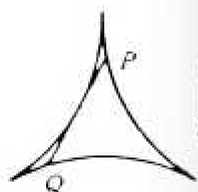


图 7

当大圆直径为 $\frac{3}{2}$，小圆直径为 $\frac{1}{2}$ 时，学过大学微积分的人，不难给出这内摆线的参数方程，并求出它所包围的面积为 $\frac{\pi}{8}=0.392\cdots$. 还可以证明这条曲线的任一条切线 PQ（夹在曲线间）的长是1.

棒可在这曲线内转过 $180°$. 例如：开始棒的一端 P 在点

1，另一端 Q 在$\overset{\frown}{23}$的中点，将棒顺时针转动，点 P 沿$\overset{\frown}{13}$到 3，再沿$\overset{\frown}{23}$到$\overset{\frown}{23}$的中点. 与此同时，Q 沿$\overset{\frown}{23}$到 2，再沿$\overset{\frown}{12}$到 1. 在这转动过程中，旋转中心有无穷多个，不断变更.

图 6 中，棒扫过的面积趋于$\frac{\pi}{8}$. 图 7 中，棒扫过的面积恰好是$\frac{\pi}{8}$. 看来所求的最小面积就是$\frac{\pi}{8}$了. 很多人（包括挂谷自己）相信答案应当是$\frac{\pi}{8}$，虽然还不能给出证明.

但他们都猜错了！

2. 意外的结论

1928 年，苏联数学家别西科维奇（A.S.Besicovitch）解决了挂谷问题. 他的结论出乎绝大多数人的意料：棒扫过的面积可以任意地小（因而没有最小值）.

对别西科维奇本人来说，这个结果却在预料之中，而且正是他多年孜孜以求的.

事实上，由于当时的历史条件，别西科维奇开始并不知道挂谷问题. 1920 年，他在自己研究的领域中提出一个问题：

任意给出一个在平面区域 D 内黎曼可积的二元函数，是否总存在一对互相垂直的方向，使得函数沿这两个方向的累次积分存在，而且就等于这个函数在 D 上的积分？

这个问题可以归结为："是否存在一个面积（Jordan 测度）为 0 的平面点集，它在每一方向上都有长度$\geqslant$1 的线段？"

他的问题与挂谷问题十分接近. 两者都要求点集在每个方向上有长度$\geqslant$1 的线段. 所不同的是挂谷问题中，长度为 1 的线段可在集中转过 180°. 这样的点集称为挂谷集.

别西科维奇称这两个问题为孪生问题.他解决了自己的问题,即构造了面积为0的平面点集,在每一方向上都有长度$\geqslant 1$的线段.接着,又运用同样的方法,并借助匈牙利数学家保尔(J.Pál)的想法进行“连结”(见第3节),成功地解决了挂谷问题.这一解答,后来经过佩龙(O.Perron,1928)与舍恩伯格(I.J.Schoenberg,1962)两度简化,已成为数学中的一个经典例子.美国数学会专门将解答的过程摄为电影,用于数学教育.我们将在下面两节介绍这个解答.

3. 平　　移

我们先来看看怎样以很小的面积,将长为1的线段(棒)从AB移到平行的位置$A'B'$(图8).

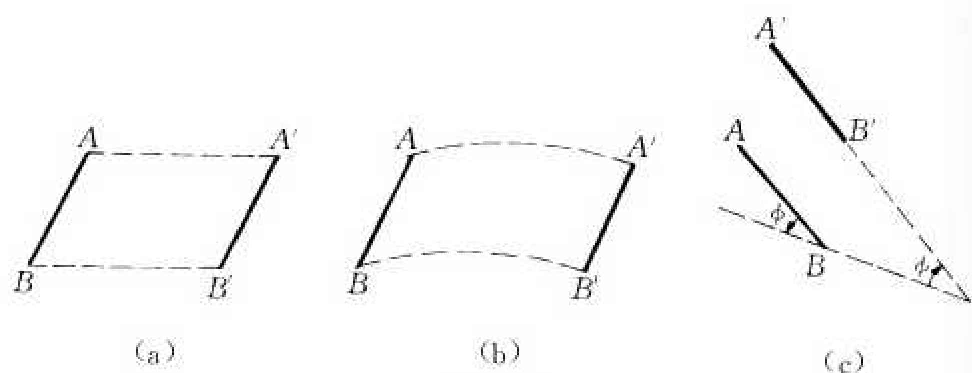


图　8

设A到$A'B'$的距离为h,则直线沿AA'方向平移,扫过的面积是h(图8(a)).如果A沿一条弧线移到A'呢?扫过的面积仍然是h(图8(b)).

怎样减少面积呢?在前面已经提到过,将棒沿所在直线

移动，并不产生面积，这个思想，现在可以利用.

首先，使 AB 绕 B（反时针）转过一个角. 这个角可以任意地小. 设它为 ϕ 弧度. 沿现在的直线 AB 将棒移动，直至 B 在线段 $A'B'$ 的延长线上（图 8(c)）. 再沿 B 点（顺时针）将棒转过 ϕ. 棒就落到直线 $A'B'$ 上. 最后，沿直线 $A'B'$ 移动直至棒与线段 $A'B'$ 重合.

棒扫过的面积是两个扇形，每个的面积是 $\frac{1}{2}\times 1^2\times\phi$. 所以扫过的面积是 ϕ. 因为 ϕ 可以任意小，所以棒扫过的面积可以任意地小.

这一方法属于匈牙利的保尔. 为简单起见. 我们称之为"平移".（请不要与通常的平移混淆）. 于是，棒可从 AB 经"平移"到平行位置 $A'B'$，扫过的面积任意小.

4. 旋　　转

为了将棒转过一个角度 θ. 我们考虑一个三角形 ABC（图 9），其中 $\angle BAC=\theta$，$BC=b$，BC 边上的高为 1.

首先将 BC 等分为 2^m 份，分点为 $D_1, D_2, \cdots, D_{2^m-1}$，$m$ 是一个任取的正整数. 为清楚起见，图中用 $m=3$ 作为说明.

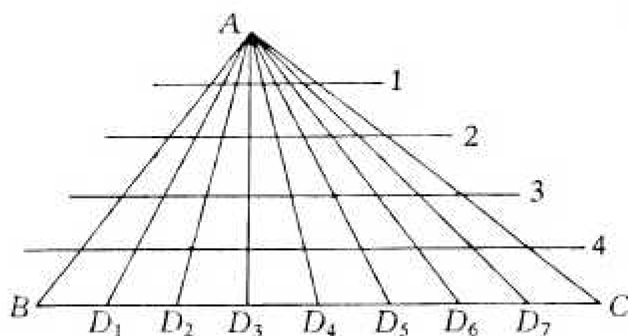


图　9

$\triangle ABC$ 被 $AD_1, AD_2, \cdots$ 分为 $8(=2^m)$ 个三角形. 再作 4 $(=m+1)$ 条 BC 的平行线, 两两的距离均为 $\frac{1}{5}\left(=\frac{1}{m+2}\right)$, 将每个三角形分为 $5(=m+2)$ 层, 每层的底的总长分别为 $\frac{b}{5}, \frac{2b}{5}, \frac{3b}{5}, \frac{4b}{5}, b\left(\frac{jb}{m+2}, j=1,2,\cdots,m+2\right)$.

这 8 个三角形可分为 4 组, 每相邻两个为一组, 将同一组的两个三角形"挤"在一起, 使它们的第 2 层的底重合(图 10). 这时第一层的底的总长不变, 仍为 $\frac{b}{5}$. 而其余每层少了 $\frac{b}{20}$, 即这时各层的总长度分别为 $\frac{b}{5}, \frac{b}{5}, \frac{2b}{5}, \frac{3b}{5}, \frac{4b}{5}$.

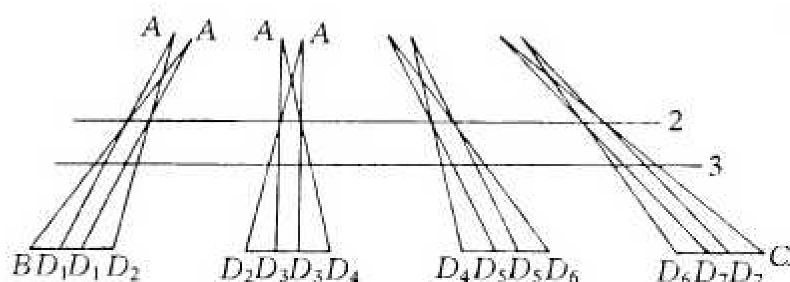


图 10

再将相邻两组挤在一起, 使第三层的底重合(图 11). 这时各层总长分别为 $\frac{b}{5}, \frac{b}{5}, \frac{b}{5}, \frac{2b}{5}, \frac{3b}{5}$.

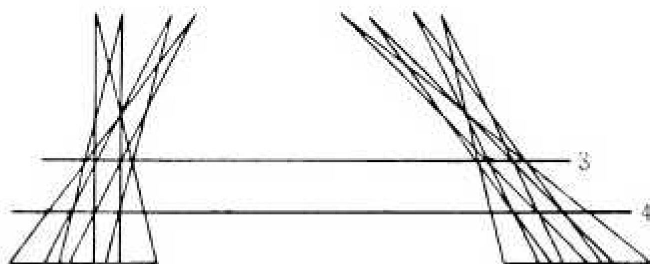


图 11

最后剩下两大组，将它们挤在一起，使第 4 层的底重合得到图 12(一般的 m 可照此办理).

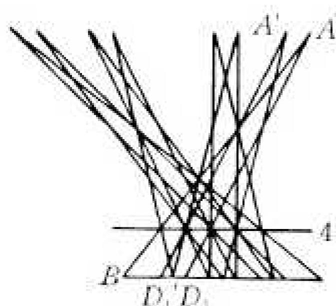


图 12

这个过程中的图形称为佩龙树(它的确长得像树).如果用电影来表演，更加生动有趣.

最后得到的佩龙树，面积是多少呢？

第一层是 2^m 个三角形，每个高为 $\frac{1}{m+2}$，底的总长为 $\frac{b}{m+2}$，因此面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{m+2}\times\frac{b}{m+2}$.

第二层是 2^{m-1} 个平行四边形，每个高为 $\frac{1}{m+2}$，底的总长为 $\frac{b}{m+2}$，因此面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{m+2}\times\left(\frac{b}{m+2}+\frac{b}{m+2}\right)$.

依此类推，中间各层都是一些平行四边形，面积同第二层.最后一层是梯形，上底为 $\frac{b}{m+2}$，下底为 $\frac{2b}{m+2}$.所以佩龙树的面积是

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{m+2}\times\left(\frac{b}{m+2}+\left(\frac{b}{m+2}+\frac{b}{m+2}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{b}{m+2}+\frac{b}{m+2}\right)+\left(\frac{b}{m+2}+\frac{2b}{m+2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{m+2}\times\frac{2b}{m+2}\times(m+2)=\frac{b}{m+2}.$$

利用佩龙树，可以使棒转过 θ 弧度，而且扫过的面积任意小：首先让棒在 $\triangle ABD_1$ 内由 AB 转到 AD_1，然后平移 AD 至 $A'D'_1$.在 $\triangle A'D'_1D_2$ 中，棒由 $A'D'_1$ 转到 $A'D_2$.……依此

类推，最后转到 AC. 在这过程中，棒除了在佩龙树中移动外，还需要一些上一节所说的平移来“连结”. 2^m-1 次平移共扫过面积 $\frac{1}{2}(2^m-1)\phi$. 因此，总面积为

$$\frac{b}{m+2}+(2^m-1)\phi.$$

b 是固定的长. 如果取 m 充分大，那么上式的第一项 $\frac{b}{m+2}$ 就可以任意地小. 取定以后，再取 ϕ 充分地小，又可以使第二项 $(2^m-1)\phi$ 任意地小. 于是整个和，也就是棒扫过的面积可以任意地小.

取定 $\theta=\frac{\pi}{2}$，那么棒可以转过 $\frac{\pi}{2}$，扫过的面积任意小，从而棒也可以转过 π（也就是转过 $\frac{\pi}{2}$ 再转过 $\frac{\pi}{2}$），扫过的面积任意小.

在上述构造佩龙树的过程中，可以保持 AB 位置不动，让其他三角形向 AB 挤过来. 如果令 m 无限增加，那么佩龙树的极限位置就是别西科维奇本人所提问题的一个解答.

5. 余 味 无 穷

上节构造的挂谷集是佩龙树与许多扇形，用线段连结在一起，构成一个连通的图形. 佩龙树与扇形的面积都很小，非常之小，中间的空隙相对说来却非常之大. 所以这个图形像一件千疮百孔，破烂已极的毛线衣，它只剩下一些很小的小片，小片之间只有一根筋连着. 真是穷相毕露，可怜得很！

这个图形不是凸的（所谓“凸”，指图形中任意两点的连结线段整个地在这个图形里）.

1921 年，保尔证明了如果限于凸的图形，那么图 4 的正三角形就是面积最小的解，此时面积为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

上节的挂谷集有很多“洞”，因而也不是单连通的. 如果限于单连通的图形(即没有洞的连通图形)，最小面积是多少呢？此外，由于上节构造中需要用平移来连结，而第三节中的平移，当 ϕ 很小时，$A'B'$ 与(转过 ϕ 后的)AB 在很远的地方才相交，从而整个图形不能限制在一个有界区域中(真是“成也萧何，败也萧何”). 不少数学家注意到这些问题，力图改进.

1941 年，阿尔芬(A. H. van Alphen)消除了无界性，证明可在半径为 $2+\varepsilon$(ε 是任意小的正数)的圆内作出面积任意小的挂谷集. 但这篇文章未受到太多的注意.

1952 年，沃克(R. J. Walker)采用由五条圆弧围成的五星形(有点像海星)，这是一个单连通的、有界的挂谷集. 它的面积约为 $\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{8}$，小于图 7 的内摆线围成的三星形. 很自然地，可以想到将三星、五星变为更一般的 n 星. 用这样的想法，1965 年，舍恩伯格与他的学生坎宁安(F. Cunningham)在一篇合作的文章中，造出一个单连通的、有界的挂谷集，它的面积为 $\frac{(5-2\sqrt{2})\pi}{24}\left(<\frac{\pi}{11}\right)$. 文章发表后，舍恩伯格得知在几个月前布洛姆(Melvin Bloom)也已得到同样结果但未发表，因此承认后者的优先权. 舍恩伯格猜测这一结果为最佳，但他猜错了.

1971 年，坎宁安终于在单位圆盘内作出面积可任意小的、单连通的挂谷集. 完全解决了上述两方面的问题. 其基本思想与前面两节相同，但更为复杂(其中也利用了阿尔芬的一些想法).

在数学中，一个老问题的解决往往产生更多的新问题．挂谷问题就有不少变形与推广．例如：

坎宁安在 1971 年的文章中还证明了如果限于星形（即图形内存在一点，连结它与图形中任意一点的线段整个在图形中），那么挂谷集的面积一定$\geqslant\frac{\pi}{108}$．另一方面，舍恩伯格与布洛姆的结果表明这样的挂谷集的最小面积$\leqslant\frac{(5-2\sqrt{2})\pi}{24}$．但是否有星形的挂谷集，面积在这两个数之间，尚是未知的．

一条半径为 1 的圆弧，转过 180°，面积能否任意任意小？1971 年，戴维斯（R.O.Davies）证明这是不可能的．那么，最小面积是多少呢？这方面的结果很少，甚至这条弧移到平行位置，扫过的面积是否以普通的平移为最小，也都没有解决．

挂谷集在每个方向上有一条长为 1 的线段．这里线段也可以改为其他图形 E，例如 E 是一根“胖针”，即长为 1 而宽为很小的正数 ε 的长方形．在这方面的研究也还处于初级阶段．

挂谷集的研究还引导到组合几何中另一个著名的、未解决的问题——细毛虫问题．

真是生也有涯，学也无涯．

问题是有趣的，结果出人意料，解法更是匪夷所思，异想天开．

数学，特别需要这样新颖，独特的想法．这门学科，决不固步自封，决不坚持僵死的教条．它富于活力，总是不断地推陈出新．各种新鲜的、创造性的思想在这个领域里如百花怒放，争奇斗妍．

学习数学，所得到的不只是几个冷冰冰的、毫无感情的公式或定理．给我们更多启迪的应当是这种不断创新的精神．

参考文献

1. H.J.van Alphen,Uitbreiding van een Stelling van Besicovitsch,Mathematica (Zutphen)B,10(1942),144—157.

2. A.S.Besicovitch,On Kakeya's problem and a similar one,Math Zeit.27(1928),313—320.

3. ibid,The Kakeya problem,Amer. Math. Monthly,70(1963),697—706.

4. H.T.Croft,K.J.Falconer,R.K.Guy,Unsolved Problems in Geometry,Springer-Verlag,New York,1991,173—175.

5. F.Cunningham,The Kakaya problem for simply connected and for star-shaped sets,Amer.Math,Monthly,78(1971),114—129.

6. F.Cunningham and I.J.Schoenberg,On the Kakeya Constant,Canad.J.Math.,17(1965),946—956.

7. R.O.Davies,Some remarks on the Kakeya problem,Proc.Cambridge Philos.Soc.69(1971),417—421.

8. J.Pa'l,Ein Minimumproblem für Ovale,Math.Ann.,83(1921),311—319.

9. O.Perron,Über Satz von Besicovitch,Math.Zeit.,28(1928),383—386.

10. I.J.Schoenbery,On the Besicovitch-Perron solution of the Kakeya problem,Study in Mathematical Analysis,Stanford University Press,Stanford,1962,359—363.

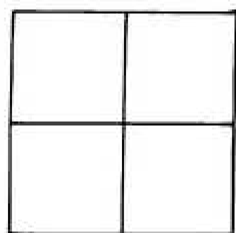
11. ibid.,On certain minima related to the Besicovitch-Kakeya problem,Mathematica(Cluj),4(27)(1962),145—148.

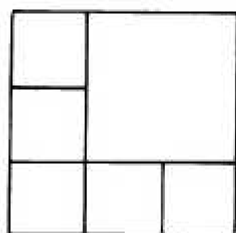
12. R.J.Walker,Addendum to Mr.Greenwood's paper,Pi Mu Epsilon J.(November 1952),275.

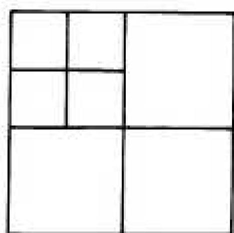
13. 单墫,组合几何,上海教育出版社,1996,98.

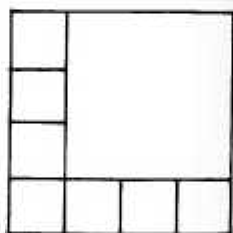
五、正方体的分解

一个正方形可以分解成4个正方形(图1),这是众所周知的事.图2,3,4表明一个正方形也可以分解成6,7,8个正方形.其中图3实际上是将图1的一个小正方形再分成4个更小的正方形,从而将一个正方形分成4+3个正方形.用这个方法也可将正方形分成6+3,7+3,8+3,…个正方形.因此可将正方形分成n个正方形,这里n为$\geqslant 6$的整数或4.另一方面,稍作推理便可知道,一个正方形不能分成2,3或5个正方形.因此,正方形的分解问题已经彻底解决.


图 1


图 2


图 3


图 4

很自然地,我们会想到正方体的分解.

显然一个正方体可以分解成8个正方形,这8个正方体大小相等,边长是原正方体的$\frac{1}{2}$.一个正方形也可以分成27个正方体,这27个正方体的边长都是原正方体的$\frac{1}{3}$.

如果正方体可以分解成n个正方体,那么将其中一个小

正方体再分成 8 个或 27 个，这样原立方体就分成 $n+7$ 或 $n+26$ 个立方体.

于是，一个正方体可以分解成 15，22，29，36，43，50，…及 34，41，48，…个正方体.

1946 年，William Scott 证明了：一个正方体可以分解成 n 个正方体，这里

$n=1,8,15,20,22,27,29,34,36,38,39,41,43,45,46,48,49,50,51,52,53$ 及大于 54 的任一整数.

Howard Eves 在他的著作《A Survey of Geometry》中介绍了上述结果. 一位数学爱好者 Von Christian Thiel 读了此书后，在 1969 年告诉 Eves，n 也可以为 54. 于是在该书 1972 年的修订版中，已改成：

$n=1,8,15,20,22,27,29,34,36,38,39,41,43,45,46$ 及大于 47 的整数.

Eves 的书中并未给出具体的分法，但这些分法只要多想一想就不难得出. 下面我们就来谈谈具体的分法.

首先，$20=3^3-2^3+1$. 这就是说，如果将正方体分成 27 个小正方体，再将其中 8 个（比如在左上方的 8 个）并作一个，那么原正方体就分成了 20 个小正方体. 于是，如果一个正方体可以分解成 n 个正方体，那么它也可以分解成 $n+19$ 个正方体.

同样，$38=4^3-3^3+1$. 于是，一个正方体可以分解成 38 个正方体. 而且根据上面所说，也可以分解成 45，52，…个正方体. 又因为

$27=20+7,39=20+19,46=20+26,53=34+19$，所以正方体可以分解为 27，39，46，53 个正方体.

在 Scott 所给出的 n 中，小于 54 的数只剩下 49 与 51

了.这两种分解均比较困难.我们有等式

$$49=6^3-4\times(3^3-1)-9\times(2^3-1),$$

这表明先将正方体分解成 6^3 个$\left(边长为原正方体\dfrac{1}{6}\right)$正方体，再将正前面的 4×3^3 个正方体合成 4 个正方体，中间 9×2^3 个正方体合成 9 个正方体，就可以得出 49 个正方体.这种分解的俯视图如图 5(假定原正方体边长为 6).

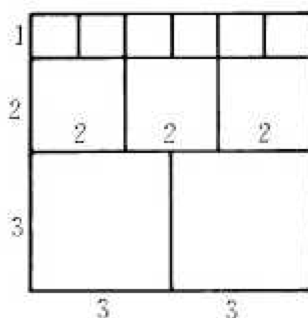


图 5

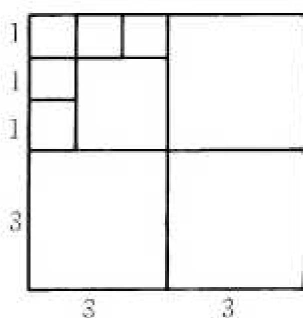


图 6

同样，等式

$$51=6^3-5\times(3^3-1)-5\times(2^3-1)$$

表明正方体可以分解为 51 个正方体.做法仍是先将正方体分解为 6^3 个正方体，再适当合并.假定原正方体边长为 6，下层的俯视图仍为图 5，而上层的俯视图为图 6.其中边长为 3 的正方体有 5 个，边长为 2 的正方体有 5 个(下层 3 个，上层 1 个，还有 1 个在两层之间).

为了将正方体分成 54 个小正方体，我们首先将底面为正方形、高为底面边长 2 倍的长方体(实际上就是两个相同的正方体垒在一起)分成 48 个正方体.不妨设底面边长是 4 个单位，将这长方体分成 2×4^3 个单位正方体，再加以合并.从正

前面看去(主视图),如图 7,有 2 个边长为 3 的正方体.最上面是 4 个边长为 2 的正方体,其余都是边长为 1 的正方体,共有

$$2\times4^3-2\times(3^3-1)-4\times(2^3-1)=48$$

个正方体.

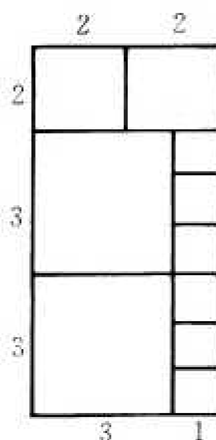


图 7

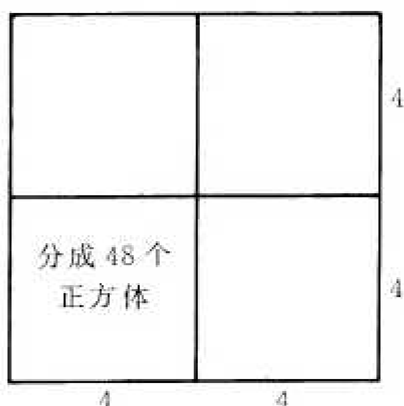


图 8

如图 8,一个正方体,假定它的边长是 8,可以分成 8 个边长为 4 的正方体.其中 6 个保持不动,而将左前方的两个叠在一起的正方体,作为一个上面所说的 $4\times4\times8$ 的长方体,分成 48 个正方体.这样原正方体便分成了

$$48+6=54$$

个正方体.或许这就是 Thiel 的分解方法.

总结一下,我们已经给出将正方体分解为 n 个正方体的方法,这里:

$n=1,8,15,20,22,27,29,34,36,38,39,41,43,45,46,48,49,50,51,52,53,54$.

注意 48,49,50,51,52,53,54 是 7 个连续整数,而如果正

方体能分成 n 个正方体，那么它也能分成 $n+7$ 个正方体，所以对于大于 47 的整数 n，正方体都可以分成 n 个正方体.

这样，我们得到了 Eves 书中的全部结论.当然，在能够分解时，分解的种数未必只有一种.要确定分解种数，除了少数情况，看来不是一种轻而易举的事情.

正方体能不能分解成 47 个正方体？这是遗留下的一个问题.或许某一位读者能够解决它.

参 考 文 献

Howard Eves, A Survey of Geometry, Revised edition, Allyn and Bacon, 1974.

六、正整数集上的库拉托夫斯基问题

1. 源　　起

拓扑学中有一个著名的库拉托夫斯基(Casimir Kuratowski,1896—1980,波兰数学家)问题:对任一点集 A,由集 A 经过取补集与取闭包的运算,至多产生14个集.

例如,设全集 I 为区间[1,5],集

$$A=\{[1,2]\text{中的有理点}\}\cup[2,3)\cup(3,4]\cup\{5\},$$

用 $f(A)$表示 A 的闭包,$g(A)$表示 A 的补集,则 A 及

$f(A)=[1,4]\cup\{5\}$,

$g(A)=\{[1,2]\text{中的无理点}\}\cup\{3\}\cup(4,5)$,

$gf(A)=g(f(A))=(4,5)$,

$fg(A)=[1,2]\cup\{3\}\cup[4,5]$,

$fgf(A)=[4,5]$,

$gfg(A)=(2,3)\cup(3,4)$,

$gfgf(A)=[1,4)$,

$fgfg(A)=[2,4]$,

$fgfgf(A)=[1,4]$,

$gfgfg(A)=[1,2)\cup(4,5]$,

$gfgfgf(A)=(4,5]$,

$fgfgfg(A)=[1.2]\cup[4,5]$,

$gfgfgfg(A)=(2,4)$.

这14个集互不相同,而再进行取补集与取闭包的运算都不能

产生新的集.

1960年,P.C.Hammer将上述问题推广至更一般的集合运算.在论文的最后,他提出一个未解决的问题,这个问题可以叙述成如下形式:

设 N 为全体自然数的集合,对任一集 $A\subseteq N$,令

$$g(A)=N-A,$$
$$f(A)=\langle A\rangle,$$

这里 $\langle A\rangle$ 表示 A 经乘法生成的集,即

$$\langle A\rangle=\{\text{任意多个 } A \text{ 中元素(允许相同)相乘的积}\},$$

单独一个元素也算作积,所以恒有 $\langle A\rangle\supseteq A$.

若由 A 经过 f,g 的多次复合,恰好产生14个不同的集(包括 A 本身),则 A 称为 K 集.

K 集是否存在?

这个问题,在已有文献上没有见到解答.

1992年,作者在香港中文大学访问期间,香港数学会主席岑嘉评(K.P.Shum)博士设宴招待王元先生和我,席间谈起这个问题,岑先生很兴奋地说他已经找到 K 集的例子.这是一个饶有趣味的数论问题,我回到宾馆仔细思考,也找到两个 K 集的例子.次日与岑先生交流,发现所找到的例子互不相同.岑先生的例子是

$$A=\{5,2^2\times3^2,7,2\times5^2,2^2\times3^3,3\times7^2,3^2\times7^3\},\quad(1)$$

其中有7个数,共含4个质因数(2,3,5,7).

我的例子是

$$A=\{2,3^3,2\times3,2\times5,2\times5^2,2\times3\times5,2\times3\times5^2\}\quad(2)$$

与

$$A=\{2,2\times3,2\times5,2\times3\times5,3^3\},\quad(3)$$

元数分别为7与5,而质因数的个数均为3.

2. 证　　明

本节证明(3)确实是 K 集((1),(2)是 K 集可以同样证明). 证明是初等、直接的,与岑嘉评先生的证明(见参考文献[3])完全不同.

为方便起见,将 $f(A)$,$g(A)$,$gf(A)$等简记为 f,g,gf 等.

首先 f 具有以下性质:

(ⅰ) 若集 $A\subseteq B$,则 $f(A)\subseteq f(B)$;

(ⅱ) $f(A)\supseteq A$;

(ⅲ) $f(f(A))=f(A)$.

这三条性质可分别称为单调增,扩大,幂等.

g 具有性质:

(ⅳ) 若集 $A\subseteq B$,则 $g(A)\supseteq g(B)$;

(ⅴ) $g(g(A))=A$.

这两条性质分别称为单调减,幂零.

显然,通常集的闭包与补集也分别具有这些性质.

为完整起见,我们证明只要 f,g 具有上述性质,则任一集 A 经过 f,g 的复合,至多产生 14 个不同的集. 先建立两个图,分别称为左图、右图:

图中的 $B\rightarrow C$ 表示 $B\supseteq C$.

图 1 中的偏序关系建立如下:

(1) 由 $g\subseteq fg$ 得 $A\supseteq gfg$.

(2) 由 $f\supseteq gfg(f)$得 $f\supseteq fgfgf$.

(3) 易知 gfg 是单调增的. 因此,由 $f\supseteq A$ 得 $gfgf\supseteq gfg$,从而 $fgfgf\supseteq fgfg$.

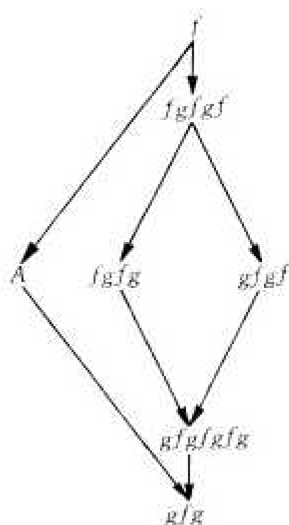


图 1

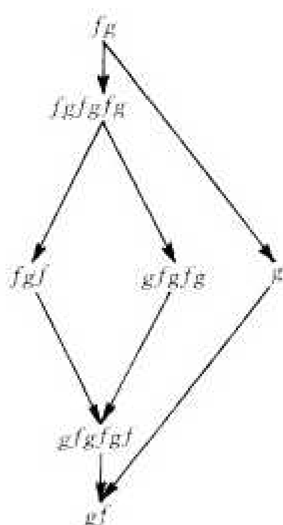


图 2

（4）由（2），（3），$f \supseteq fgfg$. 又由 gfg 的单调性，

$$gfgfgfg = gfg(fgfg) \subseteq gfg(f) = gfgf.$$

（5）由（1），$fgfg \supseteq gfg(fgfg) = gfgfgfg$.

（6）由 $f(gfg) \supseteq gfg$ 得 $gfgfg \subseteq g(gfg) = fg$，从而 $gfgfgfg \supseteq gf(fg) = gfg$.

将 g 作用于图 1，就产生图 2 及相应的偏序关系.

在图 1 和图 2 中已有 14 个集，未在图中出现的、由复合而得的接下去的两个集应当是 $fgfgfgf$ 与 $fgfgfgfg$. 但我们有：

（1）$fgfgfgf = fgf$.

事实上，由图 2，

$$fgfgfgf = f(gfgfgf) \supseteq f(gf) = fgf.$$

而由图 1，

$$fgf = f(gf) \supseteq fgfgf(gf) = fgfgfgf.$$

（2）$fgfgfgfg = fgfg$.

事实上，由(1)(将 A 换作 $g(A)$)，

$$fgfgfgfg=fgfgfgf(g)=fgf(g)=fgfg.$$

于是，由 f,g 复合，除图中 14 个集外，不能产生其他的集．当然这 14 个集未必全不相同．

对于集

$$A=\{2,2\times3,2\times5,2\times3\times5,3^3\},\tag{3}$$

我们要证明图中的 14 个集全不相同．

首先，$2,2\times3,2\times5,2\times3\times5\notin g(A)$，所以它们也都 $\notin fg$．因为 $3\in g(A)$，所以 $3^3\in fg$．从而

$$gfg=\{2,2\times3,2\times5,2\times3\times5\}\neq A.$$

因为 $3\notin f$，所以 $3\in gf$．$3,3^2,3^3\in fgf$，$3,3^2,3^3\notin fgfgf$，而 $3^3\in f$，所以 $fgfgf\neq f$．

因为 $2\in gfg$，所以 $2,2^2,2^3,\cdots\in fgfg$；$2,2^2,2^3,\cdots$ $gfgfg$；$2,2^2,2^3,\cdots\notin fgfgfg$；$2,2^2,2^3,\cdots\in gfgfgfg$．从而 $gfgfgfg$，$fgfg$，$gfgf$，$fgfgf$，f 都是无穷集，不与有限集 A，gfg 相等．

最后，我们证明 $fgfg$ 与 $gfgf$ 不可比较(即 $fgfg$ 不包含 $gfgf$，$gfgf$ 也不包含 $fgfg$)，从而 $fgfg$，$gfgf$，$fgfgf$，$gfgfgfg$ 四个集两两不等．

一方面，$2\times3^2,2\times5^2\notin f$，所以 $2\times3^2,2\times5^2\in gf$，$(2\times3^2)\times(2\times5^2)\in fgf$，即 $(2\times3\times5)^2\in fgf$，从而 $(2\times3\times5)^2\notin gfgf$．但 $(2\times3\times5)^2\in fgfg$．

另一方面，$2^2\times3^3\in f$，所以 $2^2\times3^3\notin gf$，并且若 $2^2\times3^3=n_1n_2\cdots n_k$　($k\geqslant2$)，则至少有一个 n_i 中 3 的幂指数不大于 2 的幂指数(因为 $k\geqslant2$)，这个 $n_i\in f$，从而 $n_i\notin gf$，于是 $2^2\times3^3\notin fgf$，$2^2\times3^3\in gfgf$．但 $2^2\times3^3\notin f(gfg)=fgfg$．

综合上述两方面即知 $fgfg$ 与 $gfgf$ 不可比较.

于是图 1 中的 7 个集各不相同. 它们的补集即图 2 中的 7 个集也各不相同.

图 1 中的任一集决不可能等于图 2 中的集. 如果这种情况发生, 图 1 中的最大集 f 包含图 2 中的最小集 gf, 产生矛盾.

因此, A 是 K 集.

显然, A 中的素数 2, 3, 5 可换为任三个不同的素数, 所得的集仍为 K 集.

(3) 是元数最小的 K 集, 而且其中各数所含的不同素因数的个数也最少, 这一点不难证明.

3. 推　　广

库拉托夫斯基问题还有其他的推广, 例如:

(1) 设 t 为区间 $[0,1]$ 中的实数, 定义函数

$$g(t)=1-t.$$

显然 g 具有单调减、幂零(即 $g(g(t))=t$)这两个性质. 又设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$, 满足

(Ⅰ) 单调增;

(Ⅱ) $f(t)\geqslant t$;

(Ⅲ) $f(f(t))=f(t)$.

(例如

$$f(t)=\begin{cases} t, t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]; \\ \dfrac{1}{2}, t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right] \end{cases}$$

就是符合这些条件的函数.)则 g 与 f 复合,至多产生 14 个不同的函数(连同函数 ι 在内).

(2) 设平面上的点所成的集为 X.对于任两个点(a_1, b_1),(a_2, b_2),约定在 $a_2>a_1$ 或 $a_2=a_1$ 且 $b_2>b_1$ 时,

$$(a_1, b_1)<(a_2, b_2).$$

如果 g 是关于原点的对称,显然 g 具有单调减、幂零两条性质.又设 $f: X\to X$,满足单调增、扩大(即(1)中(ⅱ)),幂等(即(1)中(ⅲ))三条性质,则由 g 与 f 复合,至多产生 14 个不同的函数.

在这两种情况中,均可举出恰好产生 14 个函数的例子.

参 考 文 献

1. J.L.Kelly,一般拓扑学,吴从炘等译,科学出版社,1982.

2. P.C.Hammer, Kuratowski's closure theorem, Nieuw Archief voor Wiskunde (3),8(1960).

3. 岑嘉评,正整数集上的 Kuratowski 闭余问题,中国科学,9(1995).

七、能兜住地球的网兜

“给我一个支点，我就能移动地球”.

这是阿基米德的豪言壮语.

设想，我们也可以大胆设想一下，给地球做一个“网兜”，兜住地球.算一算这个“网兜”所用的线至少要多少.

当然，地球也可以换成篮球、足球或者乒乓球.为方便起见，我们假定它是半径为1的单位球.

所谓“网兜”，我们是指球面上的一些点以及连结这些点的线所成的网络.这些线应当尽可能地短，换句话说，它们是绷紧在球面上的大圆的圆弧.“网眼”就是大圆弧围成的球面多边形.这多边形应当是凸的，也就是每一个内角$<\pi$.否则，如图1，在$\angle ABC>\pi$时，用大圆弧AC代替AB，BC，并将B引出的线BE，BF等换成$B'E$，$B''F$等，这里B'，B''等分别是BE，BF等与AC的交点.三角形ABC中如有其他点(如图中D)也如此处理.这样就可化成凸多边形(内角为π的顶点显然可以取消，不作为顶点)，而且所用的线，总长不会比原

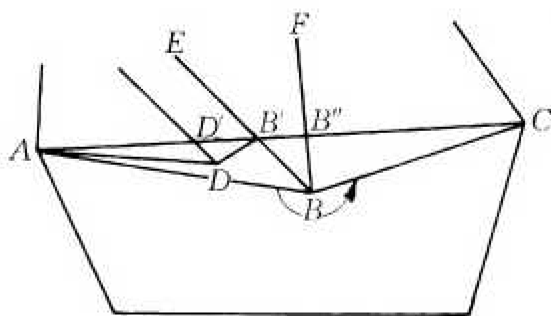


图 1

来更长，其他的网眼也不会比原来更大.

如果有仅由两边组成的网眼，即连结一对对径点 A，B 的两条大圆弧组成的月形，那么可以将这月形掰成一个大圆，从而球便从这个网眼中漏掉. 因此，我们假设网眼中没有两边形.

与平面类似，过球面凸多边形的任一边的大圆将球分为两个半球，这多边形落在一个半球内. 所以球不可能从这多边形网眼中滑出去.

因此，只要计算球面上由凸多边形（边数至少为 3）组成的网，至少有多长就可以了.

在球面上取一个凸三角形 $C_1C_2C_3$，再在$\triangle C_1C_2C_3$ 外取一点 A，使大圆弧 AC_1，AC_2，AC_3 都$<\pi$. 这四点 A，C_1，C_2，C_3 及它们之间的 6 条线组成一个 4 点网络. 这是最简单的网络. 因为 AC_1，AC_2，AC_3，均$<\pi$，所以 A 的对径点 B 在$\triangle C_1C_2C_3$ 内（反之，在$\triangle C_1C_2C_3$ 内任取一点 B，则 B 的对径点 A 到$\triangle C_1C_2C_3$ 顶点的长均$<\pi$）.

因为点 B 在$\triangle C_1C_2C_3$ 内，所以

$$（大圆弧）BC_2+BC_3<C_1C_2+C_1C_3, \tag{1}$$

从而，将 3 个与(1)类似的不等式相加得

$$（大圆弧）BC_1+BC_2+BC_3<C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3. \tag{2}$$

由 $ACi+BCi=\pi$ 及(2)得

$$（大圆弧）AC_1+AC_2+AC_3+C_1C_2+C_1C_3+C_2C_3>3\pi. \tag{3}$$

球面三角形 $C_1C_2C_3$ 可以任意小（C_1，C_2，C_3 任意接近于 A 的对径点 B），于是网络的总长（(3)式左边）也可任意接近 3π.

下面将要证明兜住单位球的网络，网络长以 3π 为下确界.也就是网络长大于 3π，并且可以任意接近 3π（这后一点已从上面的、四个点的网络看出）.

首先注意任意两个无重叠部分的凸多边形，如果有一条公共边（或公有一条边的一部分），那么过这条边的大圆将球分成两个半球，这两个凸多边形各在一个半球内.因此，两个球面凸多边形至多有一条公共边（或公有一条边的一部分）.

其次，任一球面凸多边形，由于它完全落在一个半球内，所以它的周长小于这半球的周长（即大圆周长）2π.

我们再证明一条引理，它本身亦颇有趣.

引理　单位球上任何一条长小于 2π 的闭曲线，必含在这球的一个半球内.

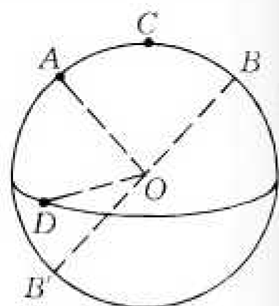


图 2

如图，在这条闭曲线 Γ 上取 A，B 两点，使从 A 沿 Γ 到 B，走过的长正好是曲线 Γ 的长的一半.设（大圆弧）AB 的中点为 C.过球心 O 作与 OC 垂直的平面 M.若 Γ 与平面 M 有公共点 D，则曲线 Γ 的长的一半 $\geqslant$（大圆弧）$AD+DB$.

设 B 的对径点为 B'，则（大圆弧）$DB'+DB=B'B=\pi$.由于 OC 平分 $\angle AOB$，所以 OC 的垂面 M 平分 $\angle AOB$，从而（大圆弧）$DB'=DA$，$DA+DB=DB'+DB=\pi$.这与 Γ 的长 $<2\pi$ 矛盾.

因此，曲线 Γ 与平面 M 无公共点，即平面 M 所分成的两个半球中，有一个含曲线 Γ.

现在，设有一个能兜住球的网络.m_0 是一个网眼（凸多边形），m_1，m_2，…，m_k 是与 m_0 有公共边的网眼.

m_0 与 m_i 的公共边为 l_i，它的长也用 l_i 表示，m_i 去掉 l_i 后的总长记为 r_i，m_0 去掉 l_i 后的总长记为 s_i. 如果

$$r_i + s_i < 2\pi, \tag{4}$$

那么去掉 l_i，并用开始说的方法产生新的网络，这网络的其它网眼均未变大，而含有 m_0，m_1 的网眼，由于(4)及引理 1，含在一个半球内，因而球不可能从这个网眼漏掉. 即新的网络仍能兜住球. 用这样的方法可以去掉一些公共边，直至对所有 i，(4)均不成立. 不妨设对所有 i，

$$r_i + s_i \geqslant 2\pi, \tag{5}$$

相加得

$$\sum_{i=1}^{k} r_i + (k-1)(l_1 + l_2 + \cdots + l_k) \geqslant 2k\pi. \tag{6}$$

每个网眼 m_i 的边至多在 $\sum_{i=1}^{k} r_i$ 中出现两次，所以

$$2 \times \text{网络总长} + (k-3)(l_1 + l_2 + \cdots + l_k) \geqslant 2k\pi. \tag{7}$$

因为网眼 m_0 的长 $l_1 + l_2 + \cdots + l_k < 2\pi$，所以在 $k > 3$ 时，由(7)式得

$$\text{网络总长} > 3\pi. \tag{8}$$

而在 $k = 3$ 时，由(7)得

$$\text{网络总长} \geqslant 3\pi, \tag{9}$$

其中等号如果成立，网眼 m_1，m_2，m_3 的边(除 l_1，l_2，l_3 外)均在 $\sum_{i=1}^{3} r_i$ 中出现两次. 这样，m_1，m_2，m_3 的边(l_1，l_2，l_3 除外)相交于 m_0 外的一点 A，而 m_0 则是三角形 $C_1C_2C_3$. 根据上面已经说过的四点网络，此时(9)仍应为严格不等式.

所以，恒有

$$\text{网络总长} > 3\pi.$$

上述问题是第四章说过的苏联数学家(后移居英国)别西

科维奇于 1956 年提出的. 这里的解答基本上与他的解答相同.

参 考 文 献

A. S. Besicovitch, A net to hold a sphere, Math. Gaz, 1956, 40: 106—107.

八、十三个球的问题

1. 格雷戈里的猜测与等价问题

1694 年,英国牛津的一位天文学家格雷戈里(David Gregory)与他的朋友、大名鼎鼎的牛顿(Isaac Newton,1642—1727),讨论体积不同的星星在天空中如何分布,引出了一个问题:一个单位球能否与 13 个(互不相交的)单位球相切?牛顿认为不可能.而格里戈雷则猜测:一个单位球能够与 13 个单位球相切.他们的讨论记录在格雷戈里的一本笔记本中,没有发表,保存在牛津的一所教堂里.

在单位球 A 与单位球 O 相切时,O 到球 A 的切线形成一个圆锥.这个圆锥含有球面 O 的一个球冠,切点 A_1 就是球冠的极(顶点).A_1 与这球冠上任一点的球面距离$\leqslant \frac{\pi}{6}$(即 30°).$\frac{\pi}{6}$称为这个球冠的半径(图 1).

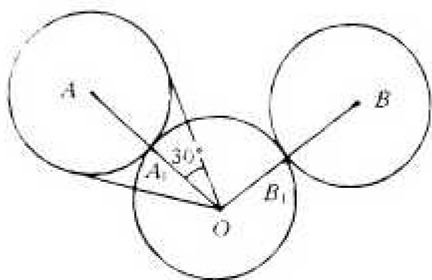


图 1

同样,对另一个与球 O 相切的单位球 B,也有一个以切点 B_1 为极,$\frac{\pi}{6}$为半径的球冠.

于是,格雷戈里的猜测等价于下面的问题:球面上能否有

13个半径为$\frac{\pi}{6}$的球冠，互不重叠？

由于$\widehat{A_1B_1} \geqslant 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$，所以$A_1B_1 \geqslant OA_1 = 1$，即每两个切点之间的（直线）距离$\geqslant 1$. 格雷戈里猜测还可以再换一个等价的说法：

单位球面上能否有13个点，每两个点之间的直线距离$\geqslant 1$？

还可以考虑如下的问题：设想空间有n个星球. 由于每颗星的半径与它们之间的距离相比，是微不足道的，我们可以将每颗星看作一个点. 为简单起见，假定这些点（星）之间的距离互不相同. 根据引力定律，两颗星星之间的引力与距离的平方成反比. 于是，从每个点向距它最近的点引一条线，表示后者对它的引力最大. 问每一点至多是几条线段的端点？

设O是其中一点，以O为心作一小球不含其他点，不妨假定球的半径为1. 以O为端点的线段OA，OB等等分别交球O于A_1，B_1等等（图2）.

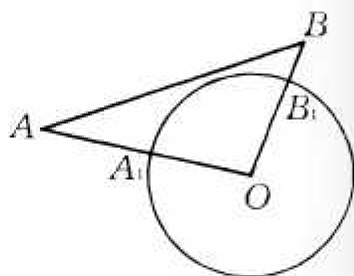


图　2

不妨设$OA > OB$. 这表明A不是与O最近的点，而O是与A最近的点. 所以

$$AB > OA > OB,$$
$$\angle AOB > 60^\circ.$$

从而$A_1B_1 > 1$. 即A_1，B_1等等是球面O上两两距离大于1的若干个点. 这些点的个数也就是以O为端点的线段的条数.

正是这个引力问题导致格雷戈里与牛顿的争论. 依照牛顿的说法，每一点至多是12条线段的端点. 而格雷戈里则认为13也是可能的.

2. 平面的情况

在平面上，相应的问题简单得多，二维的“球”就是圆. 设⊙(O,1)是圆心为 O、半径为 1 的圆. 至多有多少个互不重叠的单位圆与⊙(O,1)相切？

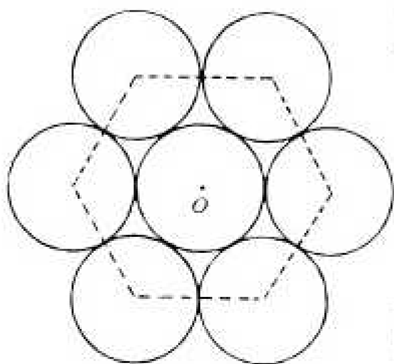


图 3

图 3 表明可以有 6 个互不重叠的单位圆与⊙(O,1)相切，它们的圆心组成一个边长为 2 的正六边形(正好是⊙(O,2)的内接正六边形).

这 6 个圆“挤”得很紧. 第 7 个圆显然没有立锥之地. 但是，直观上的显然，不能代替严谨的证明. 怎样证明与⊙(O,1)相切的圆至多 6 个呢？

证明并不困难，如第 1 节中的图 1，在⊙(A,1)，⊙(B,1)互不重叠而且均与⊙(O,1)相切时，

$$AB \geqslant 1+1=2, OA=OB=1+1=2,$$

所以△AOB 中，边 AB 最大，从而∠$AOB \geqslant 60°$.

从 O 处的周角是 360°，所以⊙(A,1)，⊙(B,1)，…这样互不重叠而且均与⊙(O,1)相切的圆，至多有

$$360° \div 60° = 6$$

个(也可以考虑各圆与⊙(O,1)的切点. 每两个切点 A_1，B_1 之间的弧 $\geqslant \frac{\pi}{3}$，所以切点的个数 $\leqslant 2\pi \div \frac{\pi}{3} = 6$).

空间的情形复杂得多. 当然，我们可以用同样大小的乒乓球与橡皮泥来做实验. 在一个球上可以粘上 12 个球，但这些球

之间还有空隙，不像平面中 6 个圆那样“亲密无间”. 或许适当挪动，还可以塞进一个球. 所以格雷戈里的猜测并非毫无道理. 不管怎么说，严格的证明是必要的. 下一节，我们先证明 12≤相切球数≤14. 虽然，直观上看，与单位球相切的单位球决不可能有 14 个. 但要证明相切球数≤14，却也还需要一些技巧.

3. 12≤相切球数≤14

不难举例说明，可以有 12 个单位球与同一个单位球相切. 最简单的例子是将单位球一层一层地堆起来，最上面 1 个，第 2 层 4 个，第 3 层 9 个，第 4 层 16 个. 那么，在第 3 层核心的那个球既与上一层的 4 个球相切，又与下一层的 4 个球相切，还与同一层的 4 个球相切.

另一个很自然的例子，就是球 O 的内接正二十面体. 它有 12 个顶点，20 个面，每个面为正三角形. 不难算出这正二十面体的每条棱长为

$$2\sin\left(\arccos\frac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{5}}\right)=\frac{1}{5}\sqrt{50-2\sqrt{125}}=1.0514\cdots>1,$$

即 12 个顶点两两的距离大于 1. 而这 12 个顶点可以作为 12 个单位球与球 O 的切点.

另一方面，我们可以证明与单位球 O 相切的、互不重叠的单位球不超过 14 个，也就是在球面 O 上，两两距离≥1 的点，个数≤14. 为此，考虑半径为$\dfrac{\pi}{6}$的球冠. 如图 4，球冠的高

$$h=A_1H=1-OH=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以球冠的面积

$$2\pi h=\pi(2-\sqrt{3}).$$

球面积为 4π，所以互不重叠的、半径为$\frac{\pi}{6}$的球冠，个数

$$\leqslant\frac{4\pi}{2\pi h}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}=4(2+\sqrt{3})$$
$$=14.928\cdots.$$

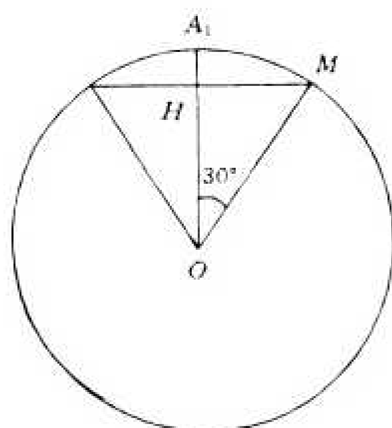


图 4

因此，15 个半径为$\frac{\pi}{6}$的球冠必有重叠.换句话说，互不重叠的、半径为$\frac{\pi}{6}$的球冠，个数$\leqslant 14$.

上界 14 是比较粗糙的.我们将进一步证明相切球数不仅$\leqslant 13$，而且$\leqslant 12$，即格雷戈里的猜测不成立.这一证明是困难的.虽然大多数人倾向于牛顿的观点，认为至多 12 个单位球与一个单位球相切.但严格的证明却姗姗来迟.直至 1953 年(将近 260 年之后)才由许特(K. Schütte)与范·德·瓦尔登(B.L. van der Waerden，这位 1903 年诞生的著名代数学家，1996 年才逝世.长寿的数学家真多!)给出(一说 1874 年，霍佩(R. Hoppe)已有证明，但我们未见到原始文献).1956 年，加拿大的利奇(John Leech)给出了一个较为简单的证明.为了介绍这一证明，需要一些球面几何的知识.

4. 球 面 几 何

对球面上每两个点 A，B，过 A，B 与球心 O 作一个平面，这平面与球面的交线是一个圆，半径与球半径相等，称为大圆.

大圆，在球面几何中也称为“直线”，与平面上的直线不同，球面上的直线，长度是有界的（即 2π），但却是“无涯”的，即没有起点与终点. 球面上任意两条直线必有两个公共点. 所以球面几何不是欧几里得几何，通常也称它为黎曼几何.

大圆上，连结 A，B 两点的弧有两条. 其中较短的一条称为连结 A，B 的“线段”. 它是在球面上从 A 到 B 的最短途径（这也正是我们称大圆为直线的一个原因）.

不过球心的平面，与球面相交得到的圆，半径小于球半径，称为小圆或简称圆.

对球面上任意三点 A，B，C，将每两点用“线段”（大圆弧）连结起来，组成球面三角形，其边长即线段（大圆弧）的长，与平面几何类似，通常记为 a，b，c，球面三角形的角，例如，$\angle A$ 是平面 OAB 与 OAC 所成的二面角. 球面三角形与平面三角形有不少类似之处，例如两三角形全等的定理；三角形两边之和大于第三边；三角形中，大边（角）对大角（边）等等. 但也有很多的不同. 尤其是球面三角形的三个角的和一定大于 π，即差 $E = A + B + C - \pi$ 是一个正数. E 称为角盈，对于单位球，它正好是球面三角形 ABC 的面积.

球面三角形有以下基本公式：

（1）正弦定理：$\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$；

（2）余弦定理：$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$；

（3）面积公式：$\mathrm{tg}\,\dfrac{E}{4} = \sqrt{\mathrm{tg}\,\dfrac{s}{2}\mathrm{tg}\,\dfrac{s-a}{2}\mathrm{tg}\,\dfrac{s-b}{2}\mathrm{tg}\,\dfrac{s-c}{2}}$，

其中 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

有了这些公式，便可以进行球面几何的计算，例如，

例 1　设球面三角形的边长为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\arccos\dfrac{1}{7}$，则由（2）

可以算出它的角为$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$；

例2　边长为$\frac{\pi}{3}$的正三角形，由(2)可算出角为$\arccos\frac{1}{3}$，面积为$3\arccos\frac{1}{3}-\pi=0.55128\cdots$.

例3　边长均为$\frac{\pi}{3}$、角均为$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$的正四边形，它的对角线互相垂直平分，长均为$\frac{\pi}{2}$.

例4　边长均为$\frac{\pi}{3}$，一条对角线为$\arccos\frac{1}{7}$的四边形，它被这条对角线分为两个全等的三角形，如例1，所以它的面积是$2\left(\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=1.334\cdots$.

例5　边长均为$\frac{\pi}{3}$，自某顶点引出的两条对角线均为$\arccos\frac{1}{7}$，这种五边形的面积为

$$1.334\cdots+\left(\arccos\frac{47}{96}+2\arccos\frac{1}{12}-\pi\right)=1.334\cdots+0.892\cdots=2.226\cdots.$$

5. 相切球数≤12的证明梗概

假设单位球面上有13个点，两两的距离（本节距离均指球面距离）$\geqslant\frac{\pi}{3}$.

如果其中某两个点的距离$<\arccos\frac{1}{7}$（$\approx1.4274\cdots$），就用一条线段将它们连结起来. 这样，13个点与它们之间的一些连线形成球面上的一个网络.

如果有一个点与其他 12 个点的距离均$\geqslant \arccos \frac{1}{7}$，那么可以移动这个点，使它至少与一个点的距离$<\arccos \frac{1}{7}$，同时与其他点的距离仍$\geqslant \frac{\pi}{3}$. 于是，没有孤立点，即每一个点至少与其他一点相连. 采用同样手法，可以假定每点至少与其他两点相连.

在这个网络中，任两条线段都不相交，即两条线段除了端点外，没有其他的公共点(证明请看下节的(1)). 具有公共端点 A 的任两条线段 AB，AC 的夹角$\angle BAC$ 在$\triangle ABC$ 为例 1 中的三角形时，取得下确界$\frac{\pi}{3}$，此时 AB，AC 一为$\frac{\pi}{3}$，另一为$\arccos \frac{1}{7}$. 于是恒有$\angle BAC > \frac{\pi}{3}$(证明请看下节的(2)). 由于 A 点处的周角为 2π，故 A 点引出的线$<2\pi \div \frac{\pi}{3}=6$ 条，即网络中每一点至多引出 5 条线.

设 $v=13$，e 为网络中线段条数，$f=f_3+f_4+f_5+\cdots$为面数，f_3，f_4，f_5，…分别表示三角形、四边形、五边形、…的个数，则有欧拉定理

$$v-e+f=2.$$

又由于每条线段属于两个面，所以

$$2e=3f_3+4f_4+5f_5+\cdots.$$

从而消去 e 得

$$2v-4=2(e-f)=f_3+2f_4+3f_5+\cdots.$$

可以证明(证明见下节约(3)，(4)，(6)，(7))，在这网络中，三角形的面积以例 2 的正三角形为最小，四边形的面积以例4的四边形为最小，五边形的面积以例5的为最小，

$n(\geqslant 5)$边形的面积$\geqslant$例 5 的五边形的面积再加上 $n-5$ 个例 2 的正三角形面积，因此有

$$\begin{aligned}4\pi &= \text{网络总面积} \geqslant 0.55128\cdots\times f_3 + 1.334\cdots\times f_4 \\ &\quad + 2.226\cdots\times f_5 + \cdots \\ &= 0.55128\cdots\times(f_3+2f_4+3f_5+\cdots) + 0.231\cdots\times f_4 \\ &\quad + 0.572\cdots\times(f_5+f_6+\cdots) \\ &= 0.55128\cdots\times(2v-4) + 0.231\cdots\times f_4 \\ &\quad + 0.572\cdots\times(f_5+f_6+\cdots).\end{aligned}$$

因为 $2v-4=22$，所以由上式得

$$0.438 \geqslant 0.231 f_4 + 0.572\times(f_5+\cdots),$$

从而 $f_5=f_6=\cdots=0$，$f_4=0$ 或 1.

如果 $f_4=0$，那么 $f_3=f=\frac{2e}{3}$，结合欧拉定理得

$$13-e+\frac{2e}{3}=2.$$

从而 $e=33$，平均每点引出

$$\frac{2e}{v}=\frac{66}{13}>5$$

条线. 与上面所述每点至多引 5 条线矛盾.

因此 $f_4=1$. 由

$$13-e+(f_3+1)=2$$

及

$$2e=3f_3+4,$$

解得 $f_3=20$，$e=32$. 由于 13 个点共引出 $2e=64$ 条线，每点至多引出 5 条线，所以必有 1 点引出 4 条线，其余 12 个点各引出 5 条线.

这样的网络（13 个点，1 点引 4 条线，其他每点各引 5 条线，组成 1 个四边形，20 个三角形），如果存在，应当能在球面

或平面上画出来.我们先画一个四边形,将其余的9个点均装在这个四边形内(在球面上,这个四边形的"外面"才是球面四边形).这里长度、角度都无关紧要,只需注意点与线的从属关系及各面都是三角形.

如果四边形的四个顶点都引出5条线,由于同一点引出的两条相邻的线必须构成三角形.所以产生一个八边形 $ABCDEFGH$(图5).不妨设 A,B,C,D,E,F 均引出5条线,这样就至少再产生 P,Q,R 三个点,得出矛盾.

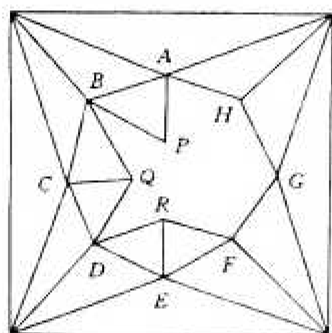


图 5

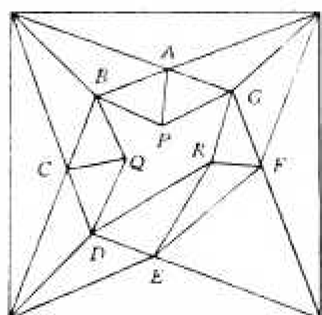


图 6

如果四边形有一个顶点只引出4条线,那么其余的点均引出5条线,如图6产生一个七边形 $ABCDEFG$,进而又产生三个点 P,Q,R,总点数仍超过13.

于是,所述的网络不存在,从而格雷戈里的猜测不成立.

6. 若 干 细 节

利奇的证明,在上一节已经作了介绍.或许是想节省篇幅,他的证明中有几处说得过于简略,有一处似有小错(下面

的(7)).本节将作些补充.对这些证明细节不感兴趣的读者可以略过不读.

(1) 上述网络中,任两条线段都不相交于内部的点,事实上,设 A,B,C,D 为网络中的四个点,每两点之间的距离 $\geqslant \frac{\pi}{3}$.这时 AC,BD 不能均 $< \frac{\pi}{2}$.否则,设 AC,BD 相交于 O,$\angle AOD=\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$(图 7).

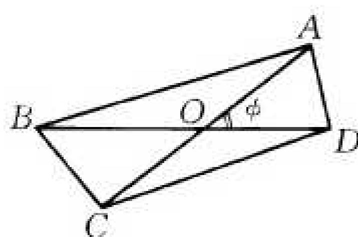


图 7

若 OA,OD 均 $< \frac{\pi}{4}$,则 $AD<\frac{\pi}{3}$.所以 OA,OD 至少有一个 $\geqslant\frac{\pi}{4}$.同理 OB,OC 至少有一个 $\geqslant\frac{\pi}{4}$.不妨设 OA,OB $\geqslant\frac{\pi}{4}$,则 $OD<\frac{\pi}{4}$.由公式(2),

$$
\begin{aligned}
l &= \cos CD=\cos OC\cos OD-\sin OC\sin OD\cos\phi\\
&\geqslant \sin OA\cos OD-\cos OA\sin OD\cos\phi\left(因为\ OA+OC<\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$m=\cos AD=\cos OA\cos OD+\sin OA\sin OD\cos\phi.$$

所以

$$
\begin{aligned}
l\sin OA+m\cos OA &\geqslant \sin^2 OA\cos OD+\cos^2 OA\cos OD\\
&=\cos OD>\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

由柯西不等式,

$$l^2+m^2\geqslant(l\sin OA+m\cos OA)^2>\frac{1}{2}.$$

而

$$m=\cos AD\leqslant\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ l\leqslant\frac{1}{2},$$

所以

$$l^2+m^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

矛盾！这表明 AC，BD 中至少有一个 $\geqslant\frac{\pi}{2}$. 从而 AC，BD 这两条线段在网络中至多连了一条. 所以网络中的线段互不相交.

（2）网络中自同一点 A 引出的两条线段 AB，AC 的夹角 $>\frac{\pi}{3}$.

不妨设 $AB=c$，$AC=b$，$\arccos\frac{1}{7}>c\geqslant b\geqslant\frac{\pi}{3}$. $\phi=\angle BAC$ 在 c，b 固定时，随 BC 的减少而减少，因此在 $BC=\frac{\pi}{3}$ 时，ϕ 最小，此时

$$\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\phi=\frac{1}{2},$$

即

$$\cos\phi=\frac{\frac{1}{2}-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

左边对 c 的导数为一正数乘以正数 $\left(-\frac{1}{2}\cos c+\cos b\right)$，所以上式是 c 的增函数，因而在 $c=\arccos\frac{1}{7}$ 时，ϕ 最小.

设 $c=\arccos\frac{1}{7}$. 上式左边对 b 的导数为一正数乘以 $\left(-\frac{1}{2}\cos b+\cos c\right)$. 所以 $\cos\phi$ 在 $\cos b=2\cos c$ 时最小，在 $b=\frac{\pi}{3}$ 时最大. 即 ϕ 在 $c=\arccos\frac{1}{7}$，$b=\frac{\pi}{3}$ 时最小，此时 $\triangle ABC$ 为

第 4 节例 1 中的三角形，$\phi=\frac{\pi}{3}$. 而在 $\arccos\frac{1}{7}>c\geqslant b\geqslant\frac{\pi}{3}$ 时，$\phi>\frac{\pi}{3}$.

因此，网络中自同一点 A 引出的两条线段，夹角 $>\frac{\pi}{3}$. 由于 A 点处的周角为 2π，故 A 点引出的线 $<\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$ 条，即网络中每一点至多引出 5 条线.

(3) 网络中的三角形，以第 4 节例 2 中的正三角形，面积为最小.

事实上，设三角形的边 $\left(\arccos\frac{1}{7}>\right)a\geqslant b\geqslant c$，在第 4 节公式(3)中，$\operatorname{tg}\frac{s}{2}$，$\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}$ 都是 b 的增函数，而对 b 的导数

$$\left(\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\right)'_b=\frac{1}{4}\sec^2\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}$$
$$-\frac{1}{4}\sec^2\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}=\frac{1}{8}\sec^2\frac{s-a}{2}\sec^2\frac{s-b}{2}$$
$$(\sin(s-b)-\sin(s-a))>0,$$

所以当 b 减少时，三角形的面积减少. 同样，当 c 减少时，三角形的面积也减少. 因此，可设 $b=c=\frac{\pi}{3}$. 又对 a 的导数

$$\left(\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}\right)'_a$$
$$=\left(\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\right)'_a\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}$$
$$+\left(\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}\right)'_a\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}$$
$$=\frac{1}{8}\sec^2\frac{s}{2}\sec^2\frac{s-a}{2}(-\sin s+\sin(s-a))$$

$$\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}+\frac{1}{8}\sec^2\frac{s-b}{2}\sec^2\frac{s-c}{2}$$

$$(\sin(s-b)+\sin(s-c))\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2},$$

上述导数$\geqslant 0$等价于

$$(\sin s-\sin(s-a))\sin(s-b)\sin(s-c)$$
$$\leqslant(\sin(s-b)+\sin(s-c))\sin s\sin(s-a),$$

上式又等价于

$$\cos\frac{b+c}{2}(\cos(b-c)-\cos a)$$
$$\leqslant\cos\frac{b-c}{2}(\cos a-\cos(b+c)),$$

即

$$\cos a\left(\cos\frac{b+c}{2}+\cos\frac{b-c}{2}\right)$$
$$\geqslant\cos\frac{b+c}{2}\cos(b-c)+\cos\frac{b-c}{2}\cos(b+c).$$

再和差化积为

$$2\cos a\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\geqslant\cos\frac{3b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{3c}{2}\cos\frac{b}{2}. \quad (*)$$

由于$b,c\geqslant\frac{\pi}{3}$,$(*)$式右边为负,左边为正,所以三角形面积也是$a$的增函数,即当$a$减少时,三角形面积减少.因此,在三角形三边均为$\frac{\pi}{3}$时,面积均小.

注:当$a>\frac{\pi}{2}$时,$(*)$式左边也取负值,这时不能断定三角形面积仍是a的增函数.但如果有一边,比如$c=\frac{\pi}{3}$,那么$(*)$变成

$$2\cos a\geqslant-1+2\cos b. \quad (**)$$

只有在这个式子成立时，三角形的面积才随 a 的减少而减少. 如果又有 $b=\frac{\pi}{3}$，那么(* *)变为 $\cos a \geqslant 0$，因此在 $a>\frac{\pi}{2}$ 时，面积是 a 的减函数，即 a 增加时，面积反而减少.

（4）网络中的四边形，面积最小的是第 4 节例 4 中的四边形.

事实上，设四边形 $ABCD$ 面积已经最小，这时四条边的长都为 $\frac{\pi}{3}$（否则，用一条对角线将四边形分成两个三角形，根据本节(3)所说，两个三角形的四条边 AB，BC，CD，DA 中至少有一条可以减少，从而使面积减少）.

根据本节(2)所说，$\angle ACD$ 是 AC 的减函数，所以在 $AC=\arccos\frac{1}{7}$ 时最大，从而 $\angle ACD \leqslant \frac{\pi}{3}$. 同样，$\angle ACB \leqslant \frac{\pi}{3}$. 因此 $\angle BCD<\pi$，四边形 $ABCD$ 的其他内角也都小于 π. 所以四边形 $ABCD$ 是凸四边形.

由全等三角形易知，对角线 AC，BD 互相垂直平分. 于是，由余弦定理，

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{AC}{2}\cos\frac{BD}{2},$$

从而 AC，BD 中至少有一个 $\leqslant \frac{\pi}{2}$. 不妨设 $AC \leqslant \frac{\pi}{2}$. 根据本节(3)所说，此时可将 AC 减少((3)中推导只要 $a \leqslant \frac{\pi}{2}$ 即成立)，从而使面积减少，除非 $AC=\arccos\frac{1}{7}$.

因此，四边形 $ABCD$ 就是第 4 节例 4 中的四边形.

（5）如果允许四边形有一边为 $\arccos\frac{1}{7}$，那么四边形面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times 1.334\cdots+0.892\cdots=1.559\cdots$，即四边形的

边长为$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\arccos\frac{1}{7}$，并有一条对角线长为$\arccos\frac{1}{7}$.

首先，这四边形一定是凸的，否则如图8，点D可以移入$\angle ADC$的对顶角内，使面积减少，除非$BD=\arccos\frac{1}{7}$. 而在$BD=\arccos\frac{1}{7}$时，对$\triangle ABD$，$\triangle BCD$用本节(3)的办法即得结论.

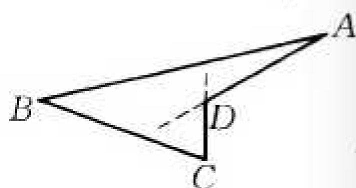


图 8

对凸四边形，由本节(4)开始所说的理由可设它的四条边为$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}$，$\arccos\frac{1}{7}$. 如果有一条对角线小于$\frac{\pi}{2}$，那么可用本节(4)最后部分的办法同样得出结论. 因此可设对角线a，b均$\geqslant\frac{\pi}{2}$.

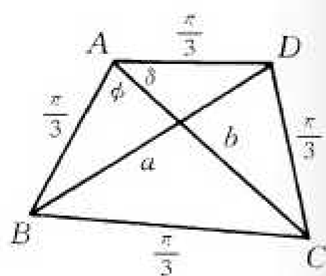


图 9

如图9，

$$\cos\phi=\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\cos b}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin b}. \tag{A}$$

与本节(2)类似，左边对b的导数为一正数乘$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\cos b\right)$，而$\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\cos b>0$，所以$\phi$是$b$的减函数. 同样$\delta$也是$b$的减函数，而$a$是$\phi+\delta$的增函数，所以$a$是$b$的减函数.

不妨设$a\geqslant b$. 为方便计算器计算，采用角度制来表示a，b的长$\left(\text{即将}\frac{\pi}{2}\text{换成}90°\right)$.

在$b=99°$时，可由(A)及

$$\cos\delta=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos b}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin b} \tag{B}$$

算出 ϕ,δ，再由

$$\cos a=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(\phi+\delta) \tag{C}$$

算出 $a<99°$. 所以必有 $b<99°$.

将 b 所在区间$[90°,99°]$等分为 9 份.

在 $98°\leqslant b<99°$时，由

$$\cos B=\frac{\cos b-\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{48}}{7}}=\frac{14\cos b-1}{12} \tag{D}$$

及

$$\cos D=\frac{\cos b-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\cos b-1}{3} \tag{E}$$

算出 $B\geqslant104°$，$D\geqslant121°$（用 $b=98°$代入以上二式得出 B，D 的下界）. 又由（A），（B），（C）及

$$\cos C=\frac{\cos a-\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{48}}{7}}=\frac{14\cos a-1}{12} \tag{F}$$

算出 $A=\phi+8\geqslant122°$，$C\geqslant105$（用 $b=99°$代入上述诸式得出 A，C 的下界）.

从而四边形 $ABCD$ 的面积（即内角和超出 360°的角盈）至少为 $90°>\frac{1.559\cdots}{\pi}\times180°$.

在其他长为 1°的小区间内，同样有四边形面积 $\geqslant 90^{\circ}$.（如用计算机不难编程算出，即使用普通的计算器也不难验证.）

于是所说结论成立.

（6）网络中的五边形，面积最小的是第 4 节例 5 中的五边形.

设五边形 $ABCDE$ 面积最小. 如果有两条对角线均长等于 $\arccos\frac{1}{7}$，那么根据本节（1）所说，这两条对角线必有公共端点（否则，比如说这两条对角线是 AC，BE，四边形 $ABCE$ 的两条对角线均小于 $\frac{\pi}{2}$，与（1）矛盾），设它们为 AC，AD，则根据本节（3），$\triangle ABC$ 的边 $AB=BC=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ADE$ 的边 $DE=AE=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ACD$ 的边 $CD=\frac{\pi}{3}$（否则这些三角形的面积可以调小），从而五边形即为所述的五边形.

因此五边形至多有一条对角线，比如说 CE，可以为 $\arccos\frac{1}{7}$. 仍根据本节（3），$\triangle ABE$ 的边 $AB=AE=\frac{\pi}{3}$，$\triangle BCE$ 的边 $BC=\frac{\pi}{3}$，$\triangle CDE$ 的边 $CD=DE=\frac{\pi}{3}$. 所以五边形的五条边均为 $\frac{\pi}{3}$.

这时五边形的其他对角线均大于 $\frac{\pi}{2}$，否则或与本节（1）矛盾或可用本节（3）的方法将面积调小.

设 $BE=b$，$BD=c$，$\angle BED=\varphi$. 由本节（2）的方法，在 $c=\frac{\pi}{2}$ 时，$\angle AEB$ 最大，因此 $\angle AEB<\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 又

$$\cos\psi=\frac{\cos c-\frac{1}{2}\cos b}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin b}$$

对 b 的导数是一个正数乘以 $\frac{1}{2}-\cos c\cos b$，而 $b, c<\frac{2\pi}{3}$，所以

$$\frac{1}{2}-\cos c\cos b\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}>0.$$

因此 $\cos\psi$ 随 b 增加而增加，

$$\cos\psi\geqslant\frac{\cos c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}>\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\psi<\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}.\right)$$

从而

$$\angle AED<\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pi.$$

同样，五边形的其他内角也都小于 π，因此五边形是凸五边形.

如果五边形有一条对角线为 $\arccos\frac{1}{7}$，那么由本节(5)，(3)，它的面积 $\geqslant 0.667\cdots+1.559\cdots=2.226\cdots$.

因此可设五边形的对角线均大于 $\arccos\frac{1}{7}$，且可设它们均大于 $\frac{\pi}{2}$，否则可用本节(3)的方法将面积调小.

五条边均等于 $\frac{\pi}{3}$，五条对角线均大于 $\frac{\pi}{2}$ 的凸五边形确实

存在.例如 $AC=AD=\frac{\pi}{2}$时可算出 $BD=CE\approx\frac{111}{180}\pi$，$BE\approx\frac{118}{180}\pi$，所以 AC，AD 稍稍调大时，各对角线均大于 $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{五条边仍保持为}\frac{\pi}{3}\right)$.不过，我们可以证明这种五边形面积均>2.226….

如果五边形面积<2.226…，那么最小角

$$\angle B<\frac{2.226\cdots+3\pi}{5}\times\frac{180^\circ}{\pi},$$

从而最小对角线 $AC<106^\circ$（仍与本节（5）相同，改用角度制）.

由本节（3）可知在 $AC>90^\circ$ 时，$\triangle ABC$ 的面积是 AC 的减函数，所以由 $AC=106^\circ$代入可求出$\triangle ABC$ 面积的下界为 34°.

固定 $AD=a$.由于 $AD\geqslant AC$，所以由本节（3），$\triangle ACD$ 的面积是 AC 的增函数.在 AC 减至 90°时，$\triangle ACD$ 面积减少.如果在这过程中，CE 始终大于 90°，那么根据本节（5）同样的理由，CE 当 $AD=106^\circ$时最大，不难算出 $CE<106^\circ$.从而$\triangle CDE$ 面积$\geqslant 34^\circ$.又根据本节（3），当 $AC=90^\circ$，$AE=60^\circ$时，（* *）成立（恒有 $\cos a\geqslant\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$），所以$\triangle ACE$ 随 CE 的减少而减少，当 $CE=90^\circ$时，达到最小值 60°.于是五边形面积

$$\geqslant 34^\circ\times 2+60^\circ=128^\circ>2.226\cdots.$$

如果在 AC 减少的过程中出现 $CE=90^\circ$，那么更有$\triangle CDE$ 的面积$\geqslant 34^\circ$，而根据上一段理由，$\triangle ACE$ 的面积$\geqslant 60^\circ$（减少 AC 时面积减少，直至 $AC=90^\circ$时，$\triangle ACE$ 的面积

$=60^\circ$). 仍有五边形面积 $>2.226\cdots$.

因此，五边形面积一定 $>2.226\cdots$. 仅在五边均为 $\frac{\pi}{3}$，两条自同一点发出的对角线为 $\arccos\frac{1}{7}$ 时，达到最小值 $2.226\cdots$.

(7) 当 $n\geqslant 6$ 时，网络中的 n 边形的面积 $\geqslant(n-5)\times 0.55128\cdots+2.226\cdots$.

首先，凸(球面)多边形的周长 $<2\pi$，所以边长均 $\geqslant\frac{\pi}{3}$ 的 n 边形，在 $n\geqslant 6$ 时，必定是凹的.

根据本节(5)一开始所说，这多边形必定有一条对角线为 $\arccos\frac{1}{7}$，否则它的面积不是最小.

沿长为 $\arccos\frac{1}{7}$ 的对角线剪开. 对剪成的两个多边形采取同样的手法，直至所有多边形都是凸的.

如果得到的多边形全是三角形，那么三角形的边长为 $\frac{\pi}{3}$ 或者 $\arccos\frac{1}{7}$，而且每个三角形均有一边为 $\arccos\frac{1}{7}$，至少有一个三角形有两条(或三条)边为 $\arccos\frac{1}{7}$，从而根据本节(3)的方法，结论成立.

如果得到的多边形中有四边形，这四边形至少有一边为 $\arccos\frac{1}{7}$. 而且可以假定其他三边均为 $\frac{\pi}{3}$(否则可用本节(3)的方法将面积调小). 由本节(5)即知结论成立.

如果得到的多边形中有五边形，由本节(6)即知结论成立.

注：关于 $n(\geqslant 6)$ 边形，利奇只是说："因为在(n 边形的)任一边上作一个面积最小的三角形，所得的 $n+1$ 边形可以

变形，使得原来的那条边变为长不小于 $\arccos\frac{1}{7}$ 的对角线，而面积只会增加，所以 n 边形的面积超过 $n-2$ 个最小三角形的部分应随 n 增加."这种说法似有问题，因为何以见得所形成的 $n+1$ 边形在所有的 $n+1$ 边形（边长 $\geqslant\frac{\pi}{3}$，而对角线均 $\geqslant\arccos\frac{1}{7}$）中面积最小？

7. 有 关 问 题

与十三个球的问题有关联的问题很多.

首先是生物学家塔莫斯（Tammes）在 1930 年提出的问题：在单位球上放 n 个半径均为 a_n 的球冠，互不重叠，a_n 的最大值是多少？这个问题到目前为止，只知道 $n\leqslant 12$ 与 $n=24$ 的答案. 其中 $n=12$ 的答案就是 12 个球冠的极构成正 20 面体的 12 个顶点，从而 $2\sin a_n$ 就是前面所说的棱长 1.0514 …，$a_n\approx\frac{63°26'}{2}$（$\approx 0.144\pi$）.

其次是球的装箱问题. 这个著名问题，我们将在下一章介绍.

还有高维的推广，例如在四维空间中，相切个数（即与同一个单位球相切的、互不重叠的单位球的最大个数）已经知道是 24 或 25，但究竟是哪一个却还不能确定. 当 $d>3$ 时，在 d 维空间中，现在只确定了两种，即 $d=8$ 时，相切个数为 240；$d=24$ 时，相切个数为 196560（这一结果也是利奇获得的）.

参 考 文 献

1. L. Fejes Tóth, On the number of equal discs that can touch an-

other of the same kind, Studia Sci. Math. Hunger, 2(1967), 363—367.

2. J. Leech, The problem of the thirteen spheres, Math. Gaz. 40 (1956), 22—23.

3. ibid, Some sphere packings in higher space, Canadian J. Math. 16(1964), 657—682.

4. K. Schütte, B. L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, Math, Ann. 125(1953), 325—334.

5. Martin Gardner, Mathematical circus, Vantage Books, New York. 1992. 35—38, 264—265.

6. H. T. Groft, K. J. Falconer and R. K. Guy, Unsolved problems in geometry, Springer-Verlag, New York, 1991, 114—115, 121.

九、球的装箱

1. 开普勒猜测

将同样大小的乒乓球装进一个体积为 L 的纸箱中，如果每个乒乓球的半径为 r，共放 N 个，那么球的体积之和为 $N\times\frac{4}{3}\pi r^3$. 为了使 N 尽可能大，可以提起纸箱抖几下，使球与球之间的空隙减小，但球与球之间总有空隙. 所以恒有 $N\times\frac{4}{3}\pi r^3<L$，即密度

$$\frac{N\times\frac{4}{3}\pi r^3}{L}<1. \tag{1}$$

（1）是一个很粗糙的不等式. 由于球与球之间的空隙相当大，$N\times\frac{4}{3}\pi r^3$ 应当比 L 小不少，(1)式右边的上界 1 应当用更精确的上界来代替.

1611 年，著名天体物理学家，发现行星运动三大定律的开普勒(J. Kepler，1571—1630)写了一本小册子《新年的礼物——论六出的雪花》，其中叙述了一种将球装箱的方法，并猜测“这是最密的装箱方法，没有其他方法可以在同样的容器中放进更多的球”.

开普勒的装箱方法如下：考虑一个边长为 2 的立方体. 分别以它的 8 个顶点及 6 个面的中心为球心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径作球. 8

个顶点为心所作的球，各有$\frac{1}{8}$在这立方体中.6 个面的中心为心的球，各有$\frac{1}{2}$在这立方体中.所以在这个立方体中，球的体积之和为 4 个整球，即 $4\times\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$.立方体的体积为 $2\times2\times2=8$，所以两者之比，也就是密度为

$$\frac{8\pi}{3\sqrt{2}}\div8=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}=0.740480\cdots.$$

开普勒由此提出了如下猜测：球的装箱密度

$$\frac{N\times\frac{4}{3}\pi r^3}{L}<\frac{\pi}{3\sqrt{2}}, \tag{2}$$

而且$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$是最佳的.

或许有人觉得上面所说的立方体里没有一个完整的球，那么可以考虑边长为 2000 的立方体，它由 1000^3 个边长为 2 的立方体组成，其中有很多完整的、半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的球(球心在各个边长为 2 的立方体的顶点或各面的中心).当然，在大立方体的边缘(6 个面的附近)也有一些不完整的球.当立方体充分大(比如说边长为 200000，甚至 2×10^{100})时，这些不完整的球的总体积与中间那些完整的球的总体积相比是微乎其微的.如果 a 是大立方体的边长，那么中间那些球的总体积是 $C_1\times a^3$(C_1 是一个正的常数)，而边缘的球，总体积只不过是 $C_2\times a^2$(C_2 是一正的常数).所以，当 L 与 r 相比很大时，边缘的球可以忽略不计，只需考虑完整的球.基于同样的理由，容器(箱子)的形状也与密度无关.

开普勒的装箱方法称为 f.c.c.装箱法."f.c.c."即立方

体(cube)各面(face)的中心(center).开普勒的装箱方法给出了密度为$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$(当$L\rightarrow+\infty$时,(2)的左边即趋于右边的$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$)的一个实例.但他并没有证明任何装箱方法,密度均不超过$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.所以(2)是一个猜测.这个猜测已有380多年历史.在数学家希尔伯特(D. Hilbert,1862—1943)的23个问题中,它被列为第18个问题的第3部分.

不难看出在f.c.c.装箱中,每一个球与12个球相切:上面4个,下面4个,同一层4个.恰好是上一章中所介绍的一种情况(堆积).因此,装箱问题与十三个球的问题,两者有很密切的联系.

f.c.c.装箱中,球心组成"格点".如果用坐标表示,那么它们正好是坐标和为偶数的那些整点:(0,0,0),(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(2,2,0),(2,0,2),(0,2,2),(2,2,2),这8个是边长为2的正方体的顶点;(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,2,1),(1,1,2),(2,1,1),这6个是各面的中心.如此等等.

如果限于格点类型的装箱方法,1831年高斯已经证明开普勒猜想成立.但1883年,巴洛(Barlow)发现有无穷多种非格点类型的装箱方法,它们的装箱密度(在极限时)也等于$\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.对非格点类型的装箱方法,开普勒猜测犹待证明.

2. 平面情况

我们先来看一看二维(平面)的装箱问题.

在面积为L的长方形内装圆,每个圆的半径为r,如果

能装 N 个(互不重叠的)圆，那么圆的总面积为 $N\cdot\pi r^2$，比值 $\frac{N\cdot\pi r^2}{L}$ 就是装箱密度，显然 $\frac{N\cdot\pi r^2}{L}<1$.

自然，我们提出二维装箱问题：$\frac{N\cdot\pi r^2}{L}$ 的上确界(上界的最小值)是多少？

这个问题早已解决，至少可以追溯到高斯，他证明了如下定理.

定理 $\frac{N\cdot\pi r^2}{L}<\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$，并且 $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 是最佳值.

首先，可以举出一个例子说明 $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 不能换成更小的值. 如图 1，考虑三组平行线. 同一组的平行线两两之间的距离为 1，不同组的直线，夹角为 60°. 它们的交点也是一种格点(如果用其中两条直线为坐标轴，在这个斜坐标系中，这些交点的坐标都是整数). 以这些点为圆心，$\frac{1}{\sqrt{3}}$ 为半径作圆. 这些圆两两相切(图 2). 在图 1 的每个正六边形中有 1 个整圆与 6 个 $\frac{1}{3}$ 的圆，面积之和为 $3\times\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\pi$. 而正六边形的边长为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$，正六边形面积为 $6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=2\sqrt{3}$. 因此密度为 $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

困难的部分是证明密度不能超过 $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

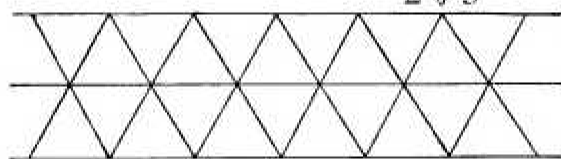


图 1

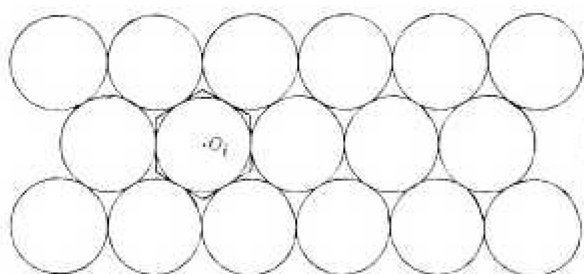


图 2

证明的思路大致如下：设平面上已放好一批圆，半径均为1. 将每个圆用“墙”围起来，使得墙内每一点与这个圆圆心的距离小于这点与其他圆心的距离. 为了作出$\odot O$ 的墙，只需将 O 与任一圆的圆心 A 连接起来，作线段 OA 的垂直平分线L_A. 这样，在 L_A 的含O 的一侧那个半平面里，每一点到 O 的距离小于这点到 A 的距离. 类似地，作 L_B，L_C，…. 这些直线所围成的多边形（也就是一些半平面的公共部分）称为 O 的狄利克雷（P. G. Dirichlet，1805—1859）小屋. 如果每个小屋的面积$\geqslant 2\sqrt{3}$，那么密度就$\leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.（在图 2 中，每个圆与6 个圆相切，围住这个圆的“墙”就是这圆与其他圆的公切线. 小屋就是这个圆的外切正六边形，它的面积是 $2\sqrt{3}r^2$）.

对一般的情况，我们不能肯定$\odot O$ 的小屋一定是六边形. 但设 L_A 与 OA 的交点为 A_1，L_B 与 OB 的交点为 B_1，则 $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB \geqslant \frac{1}{2}(1+1) = 1$. 从而不难证明在$\odot\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$与$\odot(0,1)$之间的圆环内，$A_1$，$B_1$，… 的个数$\leqslant 7$. $\odot\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$的面积是$\frac{4\pi}{3}$. 沿 L_A，L_B，… 切下去，切掉至多 7 个弓形后，

$\odot\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$剩下的面积仍然$\geqslant 2\sqrt{3}$，从而小屋的面积$\geqslant 2\sqrt{3}$. 于是定理成立. 详细的推导请参看文献[2]与[5]. 其中[5]可能是介绍这一密度定理的唯一的中文书籍.

3. 仍然是猜测

三维空间的情况困难得多. 虽然，可以作出类似的狄利克雷小屋. 但是，并非每个小屋的体积都$\geqslant 4\sqrt{2}$（我们设球半径为1. 如果每个小屋体积$\geqslant 4\sqrt{2}$，那么密度$=\frac{4\pi}{3}\Big/4\sqrt{2}=\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. 对某一种装箱法，小屋可以是球的外切正二十面体，其体积为$20\left(1-2\cos\frac{2\pi}{5}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}=5.55029\cdots<5.65685\cdots=4\sqrt{2}$（当然并不是每个小屋都这么小）. 因此，依靠单个小屋来证明开普勒猜测是不可能的. 需要更精致的做法. 在这方面的进展有：

1958年，C.A.Rogers证明密度$\leqslant 0.77963$；

1986年，J.H.Lindseg证明密度0.77844，随后又证明密度$\leqslant 0.7736$.

1988年，D.J.Muder证明密度$\leqslant 0.77836$.

这与开普勒的猜测（密度$\leqslant 0.740480\cdots$）还有一段差距.

1990年美国加州大学伯克利分校的项武义教授宣称他已经解决了开普勒猜测，并在多处报告这一结果. 由于这是一个著名猜测，引起许多人的兴趣，也遭到不少批评. 1993年，项武义的文章[4]正式发表. 文章几乎长达100页. 其主要手法是将“相邻”的小屋放在一起考虑（如果一个小屋很小，它相

邻的小屋就比较大),求出它们的平均密度.为此需要将解决"十三个球的问题"的技巧推广.证明极为复杂.

托特(Gábor Fejes Tóth)在《美国数学评论》上对项武义的文章作了颇长的评论(MR95g:52032).他认为:"项武义的战略有成功的希望.至少其主要的不等式似乎都是成立的.但说到证明的细节,我的观点是许多关键的叙述都没有可以接受的证明."他明确地表示"如果有人问我这篇文章是否完成了它的标题所说的事,即开普勒猜测的证明,我的回答是没有."托特还指出"项的战略与L·托特(L.F.Tóth)40多年前在[2]中提出的非常类似."

另一位数学家Uwe Schnell也在评论(MR96f:52028)中说:"(项文)两个主要定理的证明均不完整.开普勒猜测仍然必须当作猜测."

因此,项武义的证明没有被数学社会普遍接受.开普勒猜测仍然是一个猜测.目前最好的结果是:

1993年,D.J.Muder证明密度≤0.773055.

此外,1991年,A.Bezdek,W.Kuperberg与E.Makai,Jr.证明了开普勒猜测对平行的球串成立.

关于高维的情况,文献[1]中有详细的介绍.近年来,Noam Elkies利用椭圆曲线造出紧密的装箱方法,使得许多维数在80至1000之间的空间,密度的上界估计获得改善.

参考文献

1. J.H.Conway,N.J.A.Sloane,Sphere Packings,Lattices and Groups,Springer-Verlag,New York,1988.

2. L.F.Tóth,Lagerungen in der Ebene,auf der Kugel und in Raum,2nd ed.Springer,Berlin,1972.

3. C.A. Rogers, Packing and Covering, Cambridge, 1964.

4. W.Y. Hsiang, On the Sphere Packing Problem and the Proof of Kepler's Conjecture, International J. of Math., 5(1993), 739—831.

5. 单墫,覆盖,上海教育出版社,1983,61—71.

十、平面对称群

1. 群

我们先来说明一下什么是群.

全体整数,组成一个集合.其中可以施行加法运算:两个整数相加,结果仍为整数.加法满足结合律.加法有逆运算——减法.

一般地,如果一个集合中可以施行一种运算,满足结合律并有逆运算,那么这个集合就称为(对于这个运算的)群.

整数集合就是对于加法运算的群.

自然数集合,对于加法运算来说,不是群,因为逆运算减法在这个集合中不一定能施行.例如 $1-3$ 就产生负数.

正有理数的集合,对于加法运算不是群.但对于乘法运算来说,是群.

现在考虑平面上的平移(平行移动).

每一个平移可以用一个向量来表示.点 A 经平移 $\vec{a}$ 变成 A',就是 $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$.如果 A' 又经过平移 $\vec{b}$ 变成 A'',那么 $\overrightarrow{A'A''}=\vec{b}$.平移的加法也就是向量的加法:两个向量按通常的三角形法则相加.因此,如果点 A 经过平移 $\vec{a}$ 变成 A',A' 再经过平移 $\vec{b}$ 变成 A'',那么 $\overrightarrow{AA''}=\vec{a}+\vec{b}$,即平移 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 的和使 A 变成 A''.

向量的加法适合结合律，而且有逆运算减法存在，所以平移的全体对于加法成群.

绕一个定点 O 的旋转也成群. 这里绕 O 旋转 α（度或弧度）与绕 O 旋转 β 的两个旋转的和，是绕 O 旋转 $\alpha+\beta$ 的旋转（约定逆时针旋转转过的角为正，顺时针旋转转过的角为负）. 而绕 O 旋转 $\alpha-\beta$ 的旋转，是绕 O 旋转 α 与绕 O 旋转 β 的两个旋转的差.

平面上的变换就是平面到自身的映射. 平移、绕定点的旋转都是变换的例子.

如果变换 f 将点 A 变为 A'，A' 就称为 A 在 f 下的像，记为 $f(A)$.

如果 f,g 都是变换，f 将点 A 变为 A'，g 将 A' 变为 A''，那么变换 f,g 的合成是将 A 变为 A'' 的变换，记为 gf. 即对所有 A，

$$gf(A)=g(f(A)).$$

注意 gf 与 fg 不一定相同. 例如 f 是绕定点 O 旋转 $90°$，g 是向东平移 a，那么图 1 表明 gf 将 A 变为 A' 再变为 A''，图 2 表明 fg 将 A 变为 A_1 再变为 A_2. A'' 与 A_2 不同，即 $gf(A)\neq fg(A)$. 所以变换的合成与通常的加法、乘法不同，它不一定适合交换律. 但结合律是成立的：如果 f 将点 A 变



图 1



图 2

为A'，g将A'变为A''，h将A''变为A'''，那么gf将点A变为A''，$h(gf)$将A变为A'''；hg将点A'变为A'''，$(hg)f$将点A变为A'''. 所以$h(gf)$与$(hg)f$相同.

如果变换f将点A变为点A'，那么将点A'变为点A的变换，称为f的逆变换，记为f^{-1}.

对于任意两个变换f，h，

$$(hf^{-1})f=h,$$

所以合成的逆运算存在.

因此，平面的所有变换组成群，称为（平面）变换群.

有理数组成加法群，整数也组成加法群. 后者是前者的一部分（子集），我们称后者是前者的子群. 同样地，平面上的平移是变换群的子群，绕一个定点的全部旋转也是变换群的子群.

2. 平面运动群

如果一个平面变换f，不改变距离，这样的变换就称为运动. 即对任意两点A，B，设运动f将A变为A'，将B变为B'，则

$$AB=A'B'.$$

平移、旋转都是运动. 全体运动组成群，称为运动群.

如果f是运动，$f(A)=A'$，$f(B)=B'$，那么任一点C的像$C'=f(C)$与A'，B'组成的$\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$，$C'$因而被唯一确定. 但这时有两种情况. 一种是图 3，$\triangle A'B'C'$

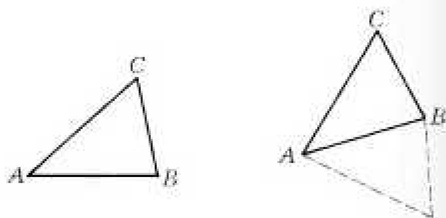


图 3

与$\triangle ABC$的方向相同(即$A-B-C$与$A'-B'-C'$的顺序都是逆时针的方向).另一种是图4,$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的方向相反($A-B-C$的顺序是逆时针方向,而$A'-B'-C'$的顺序则是顺时针方向).我们称前一种运动为第一类运动,后一种运动为第二类运动.



图 4

两个第一类运动的合成仍然是第一类运动,第一类运动的逆运动也是第一类运动,所以第一类运动组成群,称为第一类运动群.它是运动群的子群.

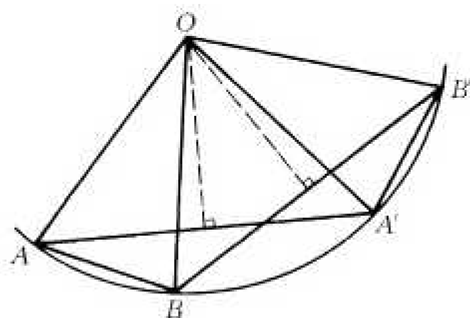


图 5

第一类运动一定是绕定点的旋转或平移,事实上,设f是第一类运动,$f(A)=A'$,$f(B)=B'$.如图5所示,作线段AA',BB'的垂直平分线.如果两条垂直平分线相交于O,那么$\triangle OAB\cong\triangle O'A'B'$.因此绕$O$旋转$\alpha(=\angle AOA'=\angle BOB')$,就将线段$AB$变为$A'B'$.任一点$C$绕$O$旋转$\alpha$得到的点$C'$满足$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,而且$\triangle ABC$,$\triangle A'B'C'$方向相同,所以$C'=f(C)$,即$f$就是绕$O$旋转$\alpha$的旋转.如果上面所作

的两条垂直平分线平行或重合，那么 AA' 与 BB' 平行或在同一条直线上. 后者 f 显然是平移 AA'(图 6). 前者又分为两种情况：(1) $AB /\!/ A'B'$. 这时 $AA' /\!/ BB'$，f 是平移 $\overrightarrow{AA'}$(图 7). (2) AB 与 $A'B'$ 不平行. 这时四边形 $AA'B'B$ 是等腰梯形，直线 AB 与 $A'B'$ 交于一点 O(O 在 AA'，BB' 的垂直平分线上)，f 就是绕 O 的旋转，旋转角为 $\angle AOA'$(图 8).

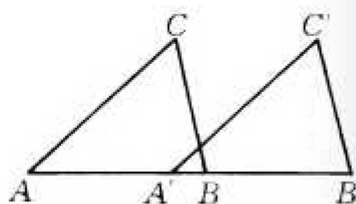


图 6

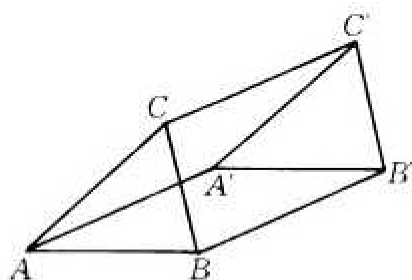


图 7

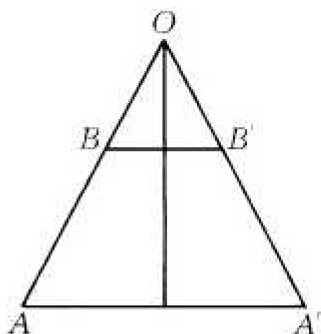


图 8

为方便起见，平移也可以看成绕无穷远点的旋转，转角为 0. 这样，每个第一类运动都是旋转.

绕定点 O_1 旋转 α_1，再绕定点 O_2 旋转 α_2，这两个旋转的合成是第一类运动，因而也是一个旋转，旋转角为 $\alpha_1+\alpha_2$(在 $\alpha_1+\alpha_2=0$ 时就是平移). 这个旋转的旋转中心 O 可以像图 5 那样，通过两组对应点连线的垂直平分线获得.

除了恒等运动(也就是不动)外，每一个第一类运动最多有一个不动点，也就是旋转中心(对于平移，没有不动点，或者说只有无穷远点为不动点).

比较图 3 与图 4，可以看出每一个第一类运动与一个轴对称（反射）合成，就变成一个第二类运动：将图 3 的 $\triangle A'B'C'$ 关于轴 $A'B'$ 作反射，就得到图 4 中的 $\triangle A'B'C'$.

第一类运动（旋转，平移）可以在平面内完成. 而第二类运动则必须将图形的一部分离开平面才能完成，不如此就不能改变平面图形的方向（即 $\triangle ABC$ 的三个顶点的顺序）.



图 9

为了表示一个运动 f，可以任取一点 A 及在 A 处的一面小旗，只要知道 A 及小旗的像，这个运动也就完全确定了（图 9）.

3. 第一类对称群

我们知道实数、有理数都是稠密的，而整数则是离散的. 也就是每两个整数至少相差 1，而两个有理数或两个实数的差可以任意地小. 如果将数用数轴上的点表示，那么在一个有限的区间内仅有有限多个整数，而有理数或实数却有无穷多个.

类似地，设 H 是平面变换群的一个子群，对任一点 A，H 中的每一个变换 f，产生 A 的一个像 $f(A)$. 如果在一个有限的区域内，仅有有限多个 A 的像 $f(A)$（f 是 H 中任一变换），那么 H 就称为平面变换群的离散子群. 运动群的离散子群也叫做对称群. 换句话说，如果 H 是运动群的子群，任一点 A 与它的像 $f(A)$（所有 $f\in H$）之间的距离有一最小的正值，那么 H 就称为对称群.

如果一个对称群中的变换都是第一类运动，那么这个对称群就称为第一类运动群.

第一类对称群只有八种，我们可以将它们一一列举出来：

（1）由相同或相反方向的平移组成的对称群

在这些平称中必有一个平移的距离 t 为最小．其他平移的平移距离 a 一定是 t 的倍数（否则 $a=qt+r$，q 是整数，$0<r<t$，在这个群中有平移距离为 r 的平移，与 t 的最小性矛盾）．

在这个群的作用下，一面小旗变成图 10 中的无数面并列在一条直线上的小旗，每相邻两面的距离为 t．

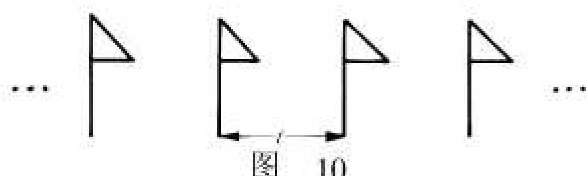


图 10

（2）至少含有两个方向不平行的平移，但不含旋转的对称群

任取一点 P，设 P 的像中 Q 与 P 最近，在直线 PQ 外与 P 最近的像为 R．这时 PQ 与 PR 的平行线形成无穷多个边长为 PQ 与 PR 的平行四边形，称为网络 P 可以平移到其中任一个顶点 T，$\overrightarrow{PT}$ 是属于这个对称群的平移．

反过来，这个对称群就是由这样的平移 $\overrightarrow{PT}$ 组成，没有其他的平移．事实上，若有其他的平移 $\overrightarrow{PU}$，则如图 11，将有平移 $\overrightarrow{P'U}$ 与 $\overrightarrow{TU}$，这里平行四边形 $P'Q'TR'$ 是含有 U 的网格．如果 U 在 $\triangle P'Q'R'$ 内，那么 $P'U<P'R'$；如果 U 在 $\triangle TR'Q'$ 内，那么 $TU<TQ'$．均与 PQ 的最小性矛盾．

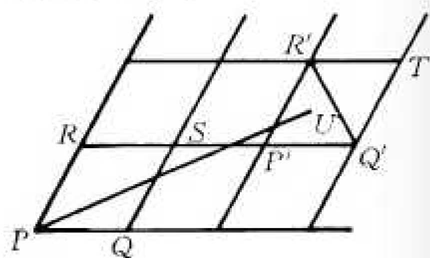


图 11

图 12 表明这个对称群将一面小旗变成无穷行小旗(每行无穷面).

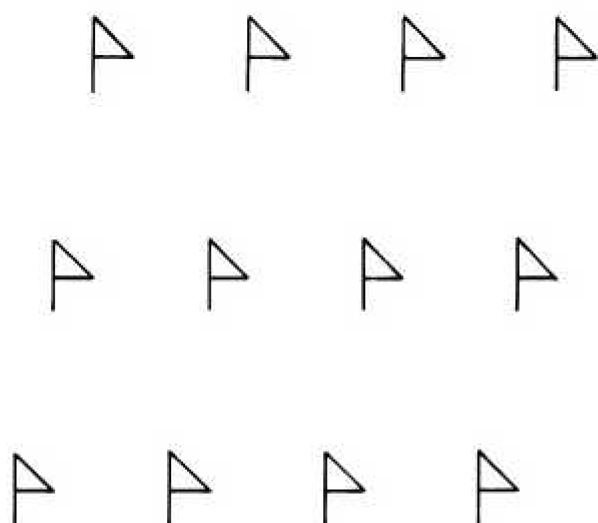


图 12

(3) 由绕同一点 O 的旋转组成的对称群

在这些旋转中必有一个旋转的角度 α 最小,其他旋转的旋转角度都是 α 的倍数(理由同上).特别地,恒等变换的旋转角度 2π 是 α 的倍数,所以 $\alpha=\dfrac{2\pi}{n}$,n 是一个自然数.

图 13 表示这个群对一面小旗的作用,其中 $n=6$.

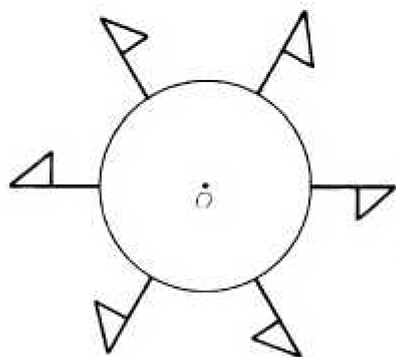


图 13

如果对称群中没有平移,只有旋转,那么这些旋转必然是绕同一个中心 O 的旋转,从而就是(3)所说的对称群.证明如下:

如果对称群中没有平移,而 α,β 分别是绕点 O_1,O_2 的旋转,

旋转角分别为 α, β（我们将旋转这一变换与旋转的角度用同一记号 α 表示，便利而不致引起混乱），那么变换 $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ 的作用是旋转角度

$$(-\alpha)+(-\beta)+\alpha+\beta=0,$$

由于对称群中没有平移，所以它只能是恒等变换.

设 $\beta O'_1=O_1$（即 O'_1 绕 O_2 旋转 β 后变为 O_1），则

$$\beta^{-1}\alpha\beta O'_1=\beta^{-1}\alpha O_1=\beta^{-1}O_1=O'_1,$$

$$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta O'_1=\alpha^{-1}O'_1.$$

但 $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$ 是恒等变换，所以由上式得

$$O'_1=\alpha^{-1}O'_1,$$

即

$$\alpha O'_1=O'_1.$$

这表明在 α 作用下，O'_1 不变. 但在 α 作用下，不变的点只有 O_1（旋转中心），所以 $O'_1=O_1$. 而这就导出

$$\beta O_1=O_1,$$

即 O_1 在 β 作用下不变，从而 $O_1=O_2$.

如果一个变换群中，既有平移又有旋转，情况如何呢？

首先，根据(3)，这些旋转的旋转角应为 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的倍数，n 是一个正整数. 下面证明 n 只能取 2，3，4，6 四个值.

设平移 t 的平移距离 t 为最小. O 为旋转 α 的旋转中心. $tO=O_1$，$\alpha O_1=O_2$（图 14）.

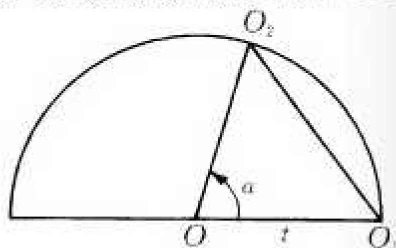


图 14

$\alpha t\alpha^{-1}$ 的旋转角为 $\alpha+0+(-\alpha)=0$，所以 $\alpha t\alpha^{-1}$ 是一个平移 t_1，$t_1O=\alpha tO=\alpha O_1=O_2$，而 $t_1t^{-1}O_1=t_1O=O_2$. t_1t^{-1} 即将 O_1 变为 O_2 的平移. 由于平移距

离 t 最小，所以

$$OO_1 \leqslant O_1O_2,$$

从而 $\alpha = \frac{2\pi}{n} \geqslant \frac{\pi}{3}$，$n \leqslant 6$.

假如 $n=5$. 旋转 α 的旋转中心为 O，而 $\alpha = \frac{2\pi}{5}$(图 15). 令 $\beta = \alpha^2 = \alpha\alpha$，即绕 O 转 $2 \times \frac{2\pi}{5}$ 的旋转. 与上面类似，$\beta t \beta^{-1}$ 是一平移 t'，将 O 变为 O_3. tt' 将 O 变为 O_4，这里 $\overrightarrow{O_3O_4} = \vec{t}$. 易知在 $\triangle OO_3O_4$ 中，$OO_3 = O_3O_4$，$\angle O_3 = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$，所以 $OO_4 < t$. 与 t 为最小矛盾. 所以 $n \neq 5$.

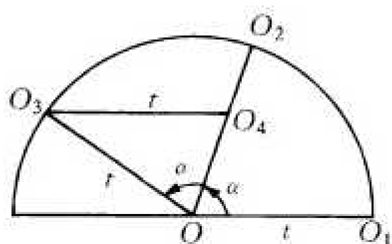


图 15

于是，$n=2,3,4,6$.

(4) 由方向相同或相反的平移及旋转组成的对称群

由(1)，这些平移的平移距离都是某个正实数 t 的倍数.

又由上面的叙述知道旋转 α 的旋转角必为 $\frac{2\pi}{n}$ 的倍数，且 $n \in \{2,3,4,6\}$. 在上面的叙述中(图 14)还指出平移 $t_1\left(=\overrightarrow{OO_2}\right)$在这对称群中. 但这对称群仅含方向相同或相反的平移，所以 $\alpha = \pi$($n=2$).

设 α 的旋转中心为 O. 又设另一个旋转 β 的中心为 S(根据上面所说，旋转角 $\beta = \pi$). 对于任一点 P，$\beta P = P_1$，$\alpha P_1 = P_2$(图 16).

因为旋转角 $\alpha + \beta = \pi + \pi = 2\pi$，所以旋转 $\alpha\beta$ 是一个平

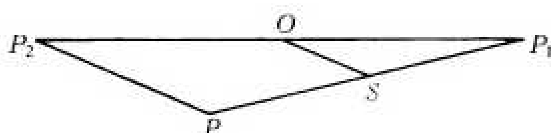


图 16

移，它将点 P 变为 P_2. 易知 $PP_2 /\!/ OS$，而且 $PP_2 = 2 \times OS$. 所以 OS 必与这变换群中的平移平行，并且 $OS = \frac{t}{2}$的整数倍.

反过来，满足$\overrightarrow{OS} = \frac{m}{2} \cdot \vec{t}$（$m$ 为整数）的点 S 都可以作为这对称群的旋转的中心. 对称群即由绕这些中心的旋转（旋转角为 π）及平移 $m \cdot \vec{t}$ 组成.

图 17 显示这个对称群将一面小旗变为两行小旗.

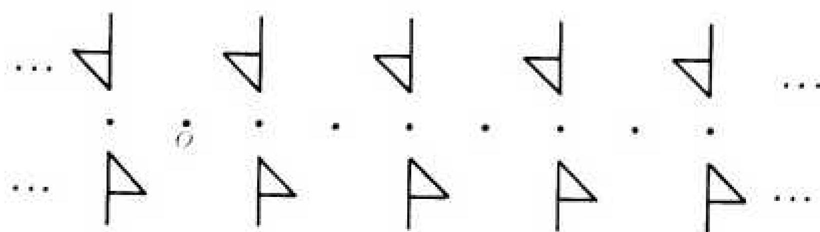


图 17

（5）至少含有两个方向不平行的平移，并且所含旋转的旋转角均为 π 的对称群

这个对称群将一面小旗变为无穷多行小旗，如图 18.

首先，从一个旋转中心 A_1 出发，如同（2），我们得到一系列平行四边形 $A_1B_1B_3A_3$，$A_3B_3B_5A_5$，…. 这些平行四边形的顶点，各边中点，中心，即图中 A_1，A_2，A_3，…；B_1，B_2，B_3，

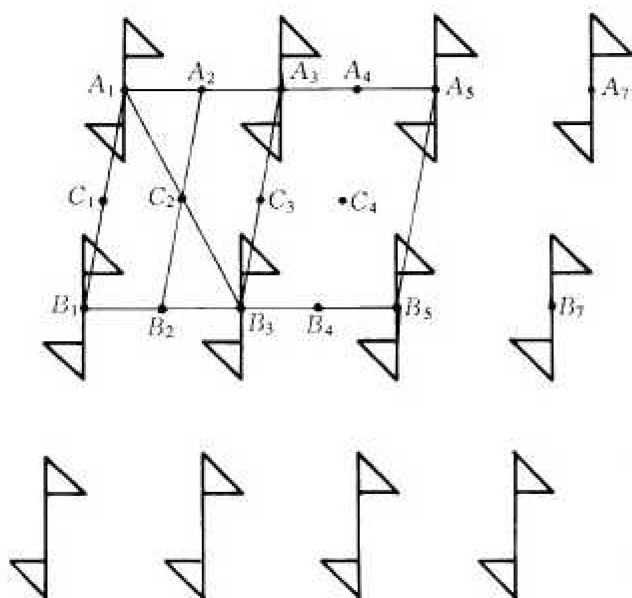


图 18

…；C_1、C_2、C_3、…都是旋转中心.

这个对称群中，没有其他的旋转中心. 假如有一旋转中心 O，不妨假定它在$\triangle A_1B_1B_3$中. 如同(4)，$\overrightarrow{B_1O}=\frac{1}{2}\vec{t}$，其中 $\vec{t}$ 为对称群中的一个平移，于是 O 必为A_1、C_1、C_2、B_1、B_2、B_3 中的一个.

(6) 至少含有两个方向不平行的平移，并且所含旋转的最小旋转角为$\frac{\pi}{2}$的对称群

与(3)类似，每一旋转角都是$\frac{\pi}{2}$的整数倍. 设 A_1 是一个旋转中心，最小旋转角为$\frac{\pi}{2}$，则在 A_1 有四面小旗如图 19 所示.

设平移中最小平移距离为 $A_1A_3=t$. 根据前面所说，将

A_3绕A_1旋转$\frac{\pi}{2}$到B_1，则$\overrightarrow{A_1B_1}$也是这对称群中的平移. 从而得到一系列正方形，如$B_1A_1A_3B_3$，它们构成通常直角坐标系中的坐标网. 在这些正方形的每个顶点处，有四面小旗，与A_1相同（但为了省事，图19中没有一一画出）. 与(5)不同的是这里的坐标系是直角坐标系，而(5)是任意两条相交直线构成的坐轴系（下面的两种情况(7)，(8)，其中坐标轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$与$\frac{2\pi}{3}$，也不能像(5)那样由任意直线构成坐标系）.

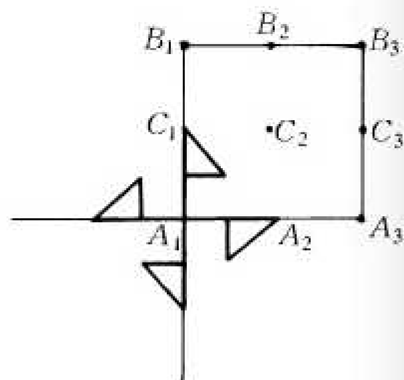


图 19

这些正方形的顶点，各边中点，中心，即图中A_1、A_2、A_3、…；B_1、B_2、B_3、…；C_1、C_2、C_3、…都是旋转中心. 与(5)相同，也只有这样的点才是旋转中心. 以各边中点为中心的旋转，旋转角是π的整数倍. 其余的旋转，旋转角是$\frac{\pi}{2}$的整数倍.

（7）至少含有两个方向不平行的平移，并且所含旋转的最小旋转角为$\frac{\pi}{3}$的对称群

每一旋转角都是$\frac{\pi}{3}$的整数倍. 设A_1是一个旋转中心，最小旋转角为$\frac{\pi}{3}$，则在A_1有6把镰刀（与小旗作用相同，我们换一种图形也无不可）如图20所示.

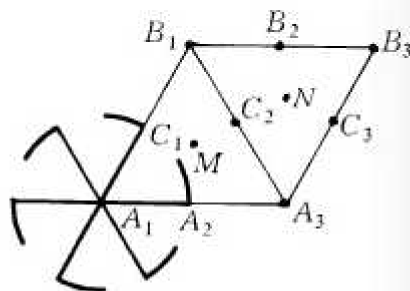


图 20

设平移中最小平移距离为 $A_1A_3=t$，将 A_3 绕 A_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$ 到 B_1，则 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 也是这对称群中的平移. 从而得到一系列菱形，如 $B_1A_1A_3B_3$，它们构成斜坐标系的坐标网. 在这些菱形的每个顶点处，有六把小镰刀，与 A_1 相同（为了省事，图 20 中没有一一画出）. 每个菱形可以分成两个相等的正三角形. 这些正三角形的顶点，各边中点，中心，即图中 $A_1, A_2, A_3, \cdots$；$B_1, B_2, B_3, \cdots$；$C_1, C_2, C_3 \cdots$；$M, N, \cdots$，都是旋转中心. 其中以 M, N 等点为中心的旋转，旋转角是 $\frac{2\pi}{3}$ 的倍数；以 A_2, B_2, C_1, C_2, C_3 等点为中心的旋转，旋转角是 π 的倍数；以 A_1, A_3, B_1, B_3 等点为中心的旋转，旋转角是 $\frac{\pi}{3}$ 的倍数. 它们分别称为三次、二次、六次旋转中心（旋转角为 $\frac{2\pi}{n}$ 的中心称为 n 次旋转中心）.

只有上述的点是旋转中心. 对于二次旋转中心（六次旋转中心当然也是二次旋转中心），证明与上面相同. 设 O 为一个三次旋转中心，在 $\triangle B_1A_1A_3$ 中. 绕 A_1 旋转 $-\frac{2\pi}{3}$，再绕 O 旋转 $\frac{2\pi}{3}$，结果是一个平移. 在这平移中，A_1 移动的距离为 OA_1 的 $\sqrt{3}$ 倍. 换句话说，$OA_1=\frac{t}{\sqrt{3}}$，其中 t 为一平移的距离. 因为 O 在 $\triangle B_1A_1A_3$ 中，所以这里的 t 只能为 A_1B_1 的长. 同样 OB_1，OA_3 的长亦如此，从而 O 只能为 M.

（8）至少含有两个方向不平行的平移，并且所含旋转的最小旋转角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的对称群

设 A_1 是一个旋转中心，最小旋转角为$\frac{2\pi}{3}$，则在 A_1 有三把镰刀如图 21 所示.

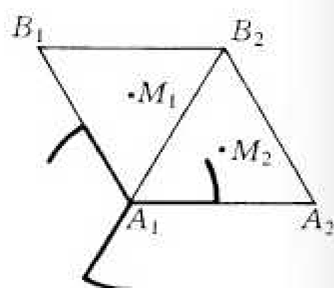


图 21

设平移中最小平移距离为 A_1A_3. A_3 绕 A_1 旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 到 B_1，则 $\overrightarrow{A_1B_1}$也是这对称群中的平移，从而得到一系列菱形，如 $B_1A_1A_2B_2$，它们构成斜坐标系的坐标网. 每个菱形的顶点都是三次转动中心(即在这些点都有三把小镰刀，但我们省略未画). 此外$\triangle A_1B_1B_2$ 的中心 M_1，$\triangle B_2A_1A_2$ 的中心 M_2 等也都是三次转动中心.

这对称群只有上述的点是旋转中心(理由与(7)相同).

4. 对　称　群

如果允许有反射(轴对称)，那么对称群的种数更多. 我们将对称群分为三大类(当然也可以有其它的分法)：(1) 点群(point groups)，其中没有平移.

(2) 饰带群(frieze groups)，其中的平移方向相同或相反.

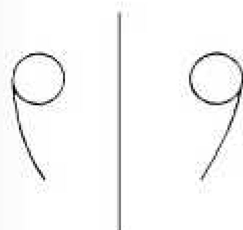
(3) 墙纸群(wallpaper groups)，其中有方向不平行的平移.

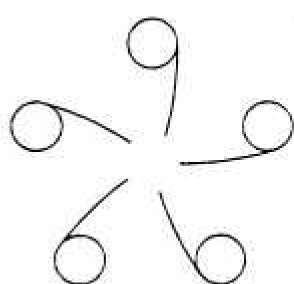
首先，看一看点群. 其中又有三种：

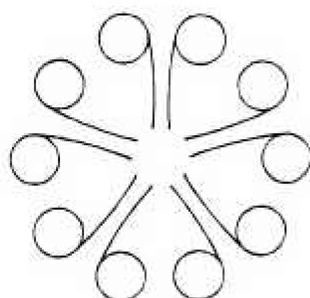
1° 仅由一个反射及恒等变换组成的对称群. 如图 22. 这次我们用 ρ 形代替小旗与镰刀.

2° 仅由旋转组成的对称群. 在上节的(3)中已指出这些

旋转的中心一定是同一个点，旋转角都是$\frac{2\pi}{n}$的整数倍，n 为任一正整数. 图 23 是 $n=5$ 的情况.


图 22


图 23

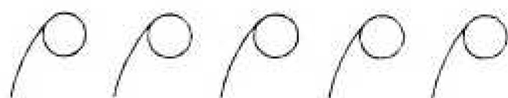

图 24

3° 在 2°中加入反射. 由于旋转中心 O 反射后仍为旋转中心，而根据上面所说，旋转中心只有一个，所以每根反射轴都经过旋转中心. 图 24 是 $n=5$ 的情况.

达·芬奇曾经研究过点群.

现在，我们来看饰带群. 这有 7 种情况.

1° 即上节(1)，仅含平移. 如图 25.


图 25

2° 即上节(4)，仅含平移与中心对称(即旋转角为 π 的旋转). 这些旋转中心的距离为 $n\cdot\frac{d}{2}$，其中 n 为整数，d 为最小的平移距离. 图可见上节的图 17，或者图 29 中由两个圈所组成的图.

3° 由平移及反射轴与平移方向垂直的反射组成. 如图 26.

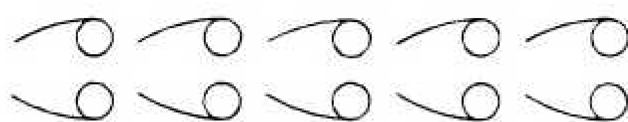


图 26

4° 由平移及反射轴与平移方向平行的反射组成. 如图 27.



图 27

如果反射轴与平移方向既不平行也不垂直,则如图 28 所示,先作反射 R,再平移 t,最后再作反射 R(应当说是反射 R^{-1},但 R^{-1}与 R 是相同的). 这样三个变换合成的结果相当于一个方向与反射轴垂直的平移. 因为饰带群中平移的方向均相同或相反,所以饰带群中的反射,反射轴必与平移方向平行或垂直,即上面 3°,4°两种情况.

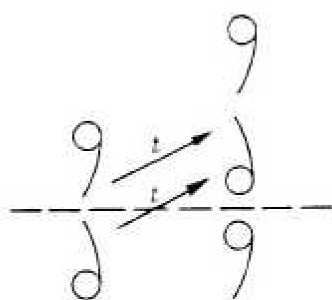


图 28

在反射轴与平移方向平行时,反射轴只能有一个,因为有两个这样的反射轴,则两个反射的合成是一个与反射轴垂直的平移. 与饰带群定义不合.

在反射轴与平移方向垂直时,有无数个这样的反射轴,它们之间的距离是$\frac{t}{2}$的整数倍,t 是最小的平移距离.

5° 在 2°中增加反射轴与平移方向垂直的反射，也就是在 4°中增加旋转角为 π 的旋转．如图 29 所示．

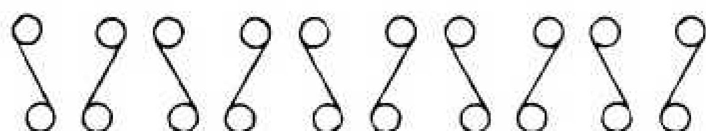


图 29

6° 在 2°中增加反射轴与平移方向平行的反射（这样的反射仅一个）及反射轴与平移方向垂直的反射（这样的反射有无穷多个）．如图 30 所示．

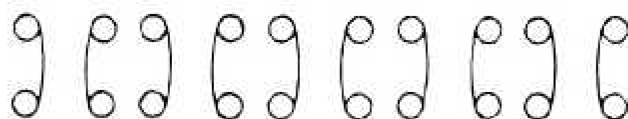


图 30

容易知道旋转角为 π 的旋转等于作两次反射，两次反射的反射轴互相垂直，并且都通过旋转中心．

先作一次反射，再沿与反射轴平行的方向平移，称为滑动反射．设 g 为一滑动反射，则 g^2 是一个平移，方向与反射轴平行．

7° 由一个滑动反射 g 生成．如图 31 所示．

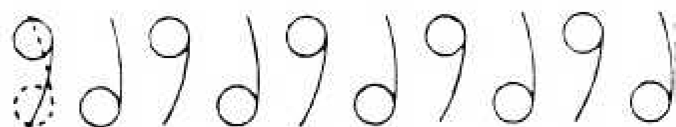
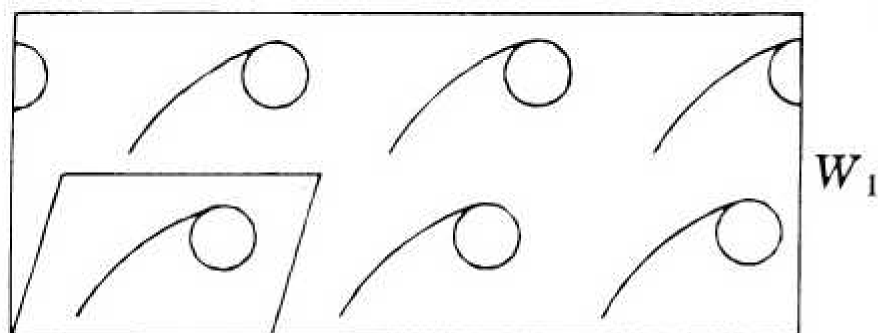


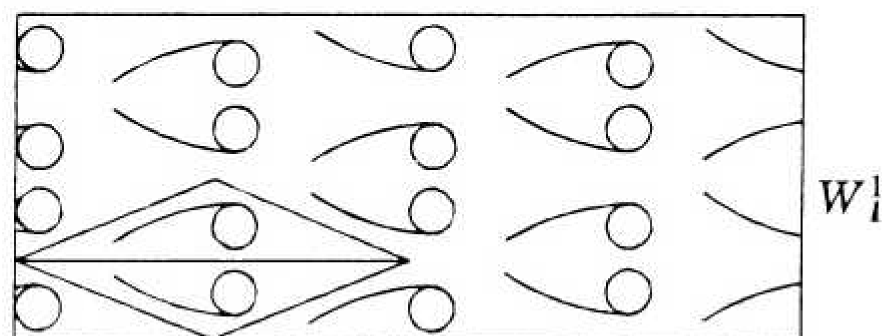
图 31

最后，简单地介绍墙纸群及有关的图．上节的（2），（5），

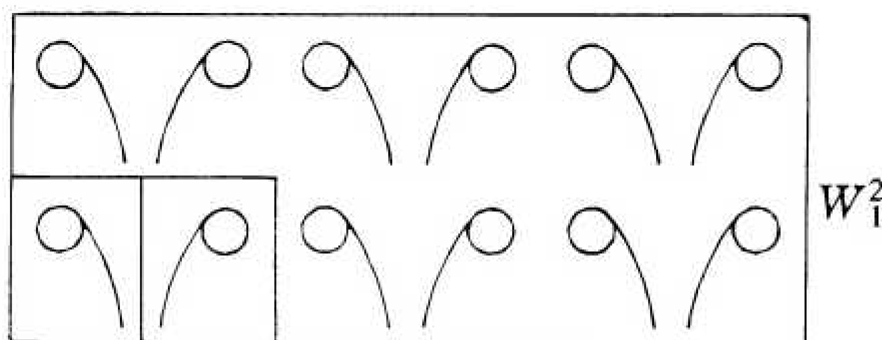
(6),(7),(8)是五种墙纸群,分别记为 W_1, W_2, W_4, W_6, W_3(W_n 中,旋转角以$\frac{2\pi}{n}$为最小).加入反射及滑动反射,产生 17 种墙纸群,如图所示.每一种有一个基本部分(图中用平行四边形框住),由它通过平移可以得出整个图形.



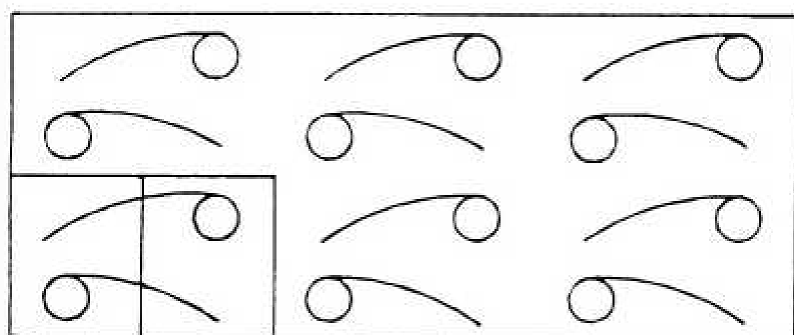
W_1



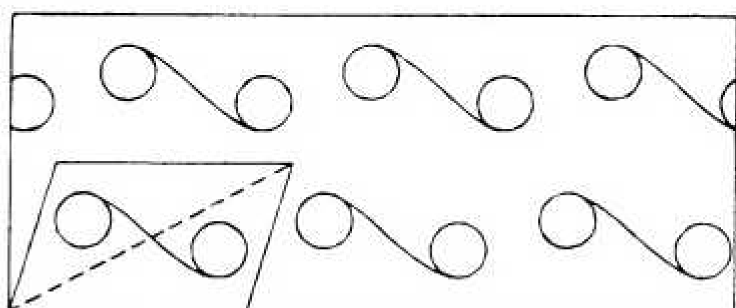
W_1^1



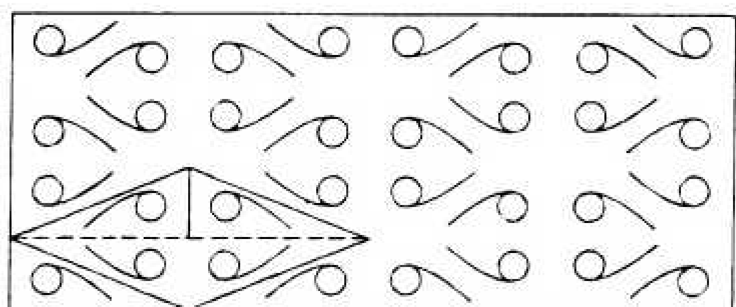
W_1^2



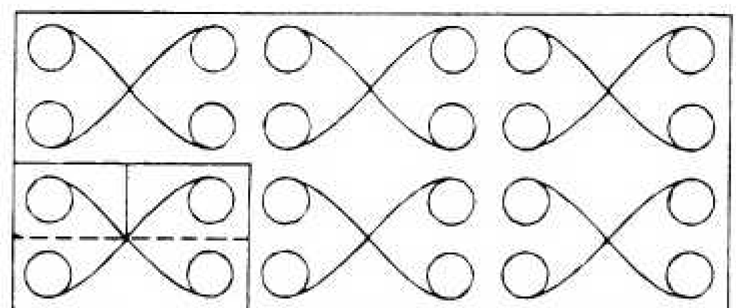
W_1^3



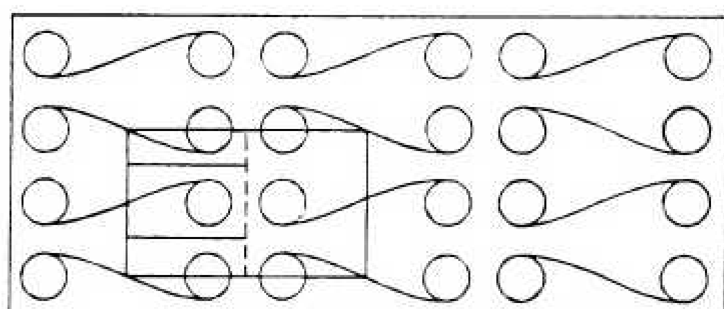
W_2



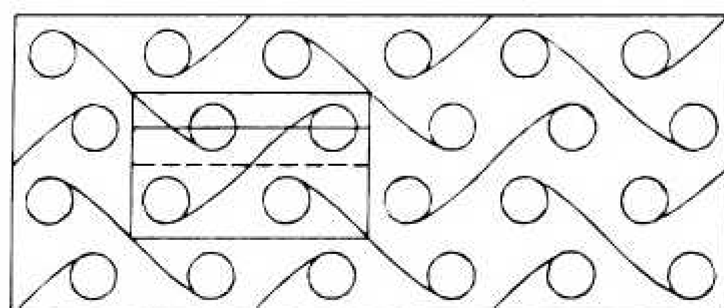
W_2^1



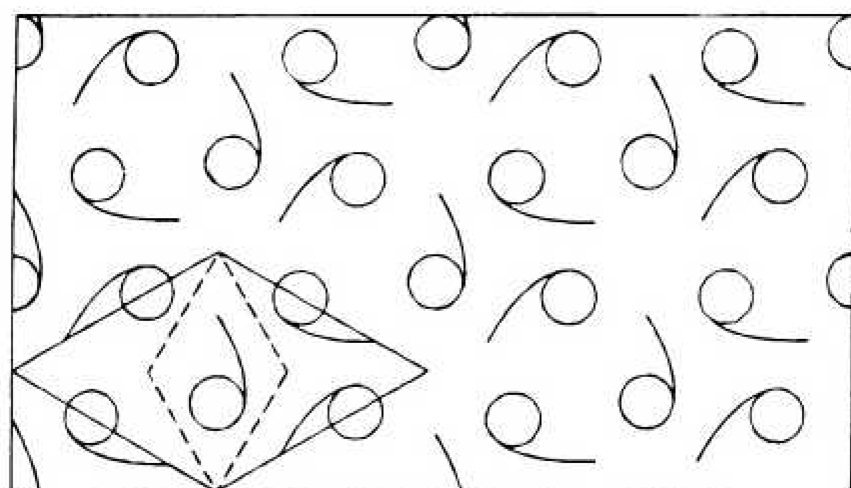
W_2^2



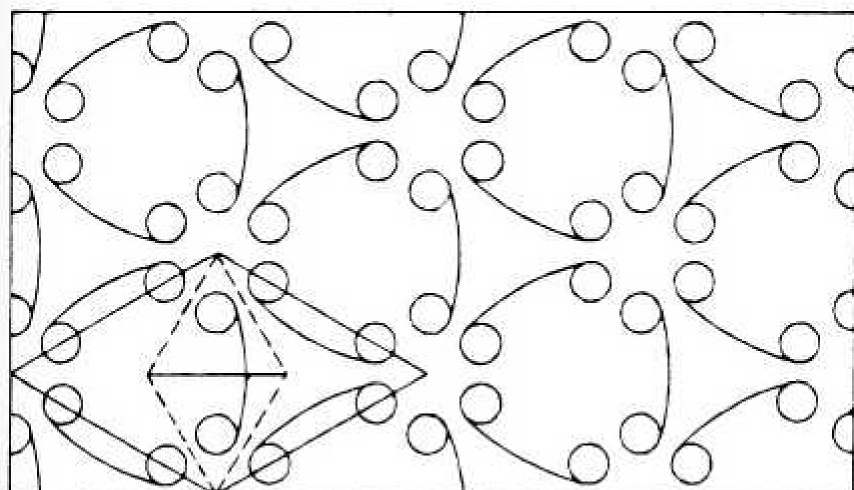
W_2^3



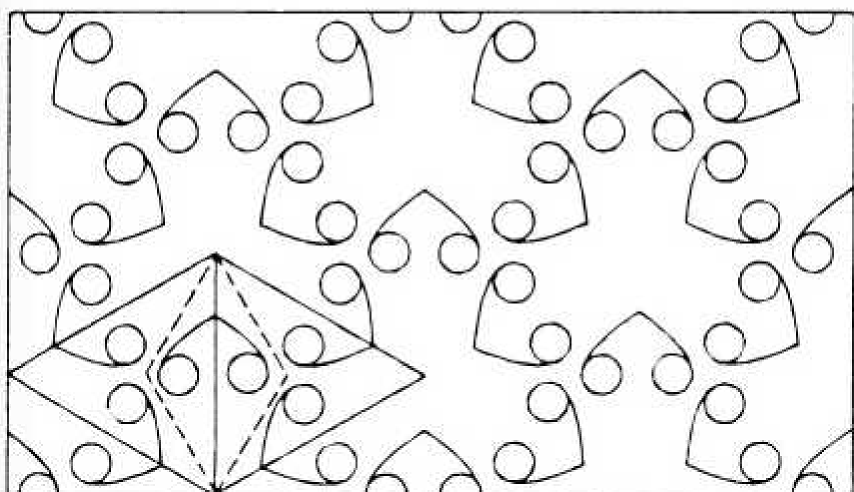
W_2^4



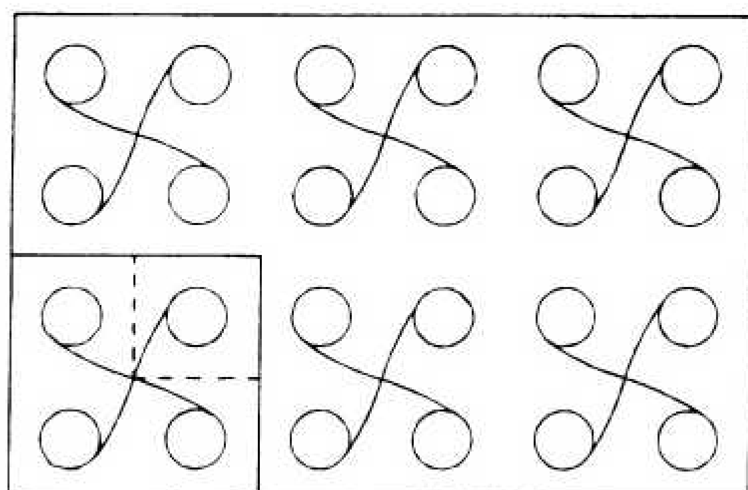
W_3

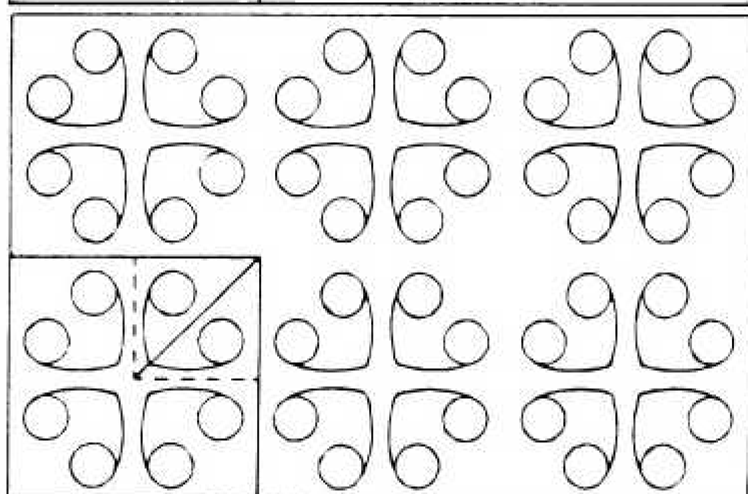


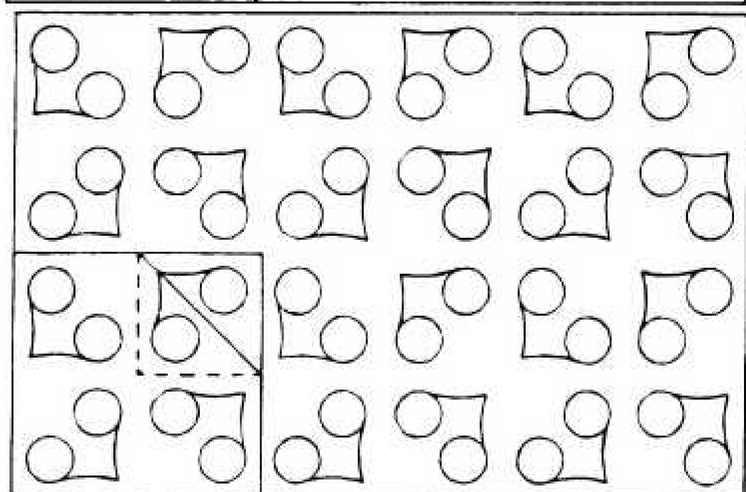
W_3^1

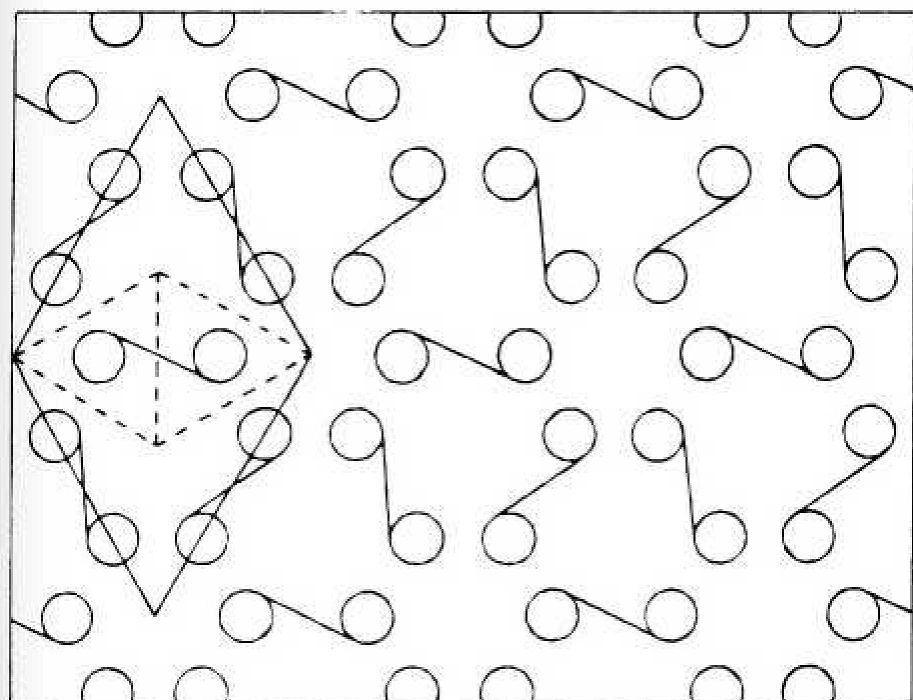


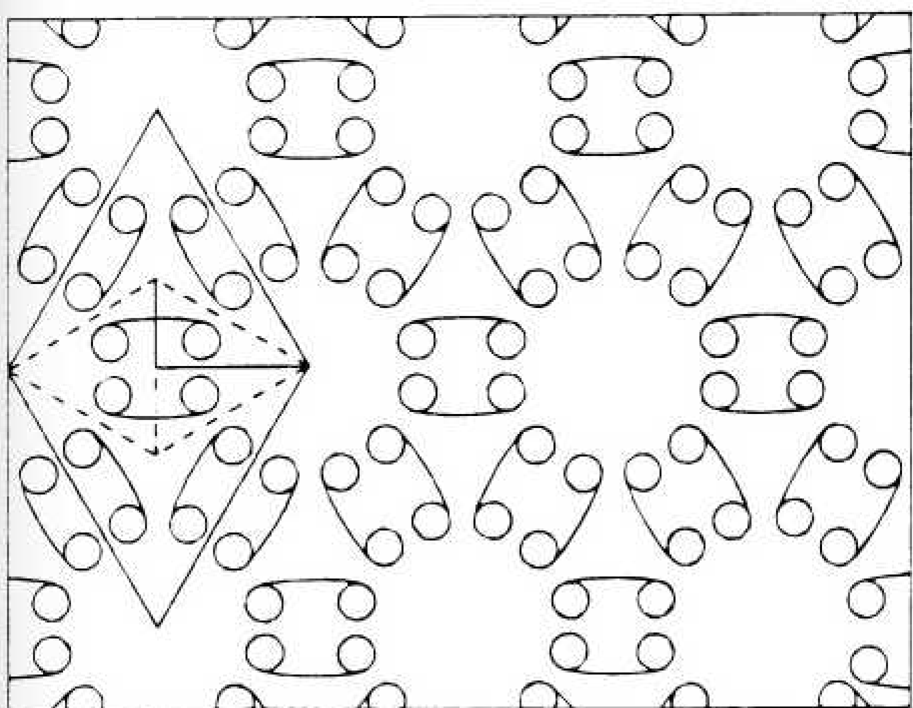
W_3^2


W_4


W_4^1


W_4^2


W_6


W_6^1

摩尔人在西班牙南部的格拉那达(Granada)所建教堂中,使用了全部的17种墙纸群作为装饰.

在三维空间中,与墙纸群相对应的群有230种.列举它们的表是 E. Федоров(1885),Schoenflies(1891),W. Barlow(1894)等人分别独立完成的.

参 考 文 献

1. L. Fejes Tóth, Regular Figures, Pergamon Press, 1964.
2. D•希尔伯特与S•康福森,直观几何学,王联芳译,高等教育出版社,1959.
3. I. M. Yaglom, Geometric Transformations, Random House, New Mathematical Library, 1962.
4. J. H. Cadwell, Topics in Recreational Mathematics, Cambridge Vniversity Press, 1970.
5. 数学百科辞典(日本数学会编),科学出版社,1984.

看《波利亚的相册》

波利亚(George Pólya,1887.12.3—1985.9.7.匈,瑞,美[1])是20世纪一位重要的数学家、教育家.他享年很长,贡献甚多,阅历十分丰富,交游极为广泛.这本《波利亚的相册——一个数学家的邂逅》,在他去世后两年出版(Birkhaüser,Boston·Basel,1987),共有128幅照片,其中包括三届国际数学家大会,瑞士数学会会议,德国数学会会议,在一定程度上反映了20世纪,特别是20世纪上半叶,数学社会的活动和数学家之间的交往.在相册上出现的知名数学家,至少有145位,可谓群星熠熠.很多照片在其他地方从未见过,弥足珍贵.遗憾的是,由于版权,不能复印.读者只有设法借到原书,才能一饱眼福(笔者是在加拿大滑铁卢大学见到此书的,不知国内哪一家图书馆有这本书[2]).这里作些文字介绍,着重在数学家的轶事、他们之间的友谊与作为普通人的一面.

相册的第一张是三人合影,其中有伟大的爱因斯坦(Al-

---

① 不少数学家有几个国籍,我们依次写出.如"德,美"表示原先是德国人,后来加入美国籍.在不致混淆时,国名均用简称,如瑞表示瑞士,而瑞典则写瑞典.

② 南开大学的数学图书馆有此相册.南开数学图书馆独立于南开大学的校图书馆,它与南开数学所于1985年成立,现在的图书馆是1991年竣工的新馆(逸夫馆).在陈省身先生的关怀下,它已成为我国数学领域的重点图书资料中心之一.请参见:田义梅,"陈省身与南开数学图书馆"一文,载于《科学》,1998,50(5):43.——编者注

bert Einstein,1879—1955,德,美).波利亚说"我们从爱因斯坦的照片开始",大概是因为爱因斯坦的名声最大,虽然爱因斯坦首先是物理学家(当然也可以算作数学家).通常我们见到的照片,是爱因斯坦晚年的形象,头发很长,不修边幅,带点玩世不恭的神情.而这一张,摄于1912至1916年之间,爱因斯坦年轻,英俊,留着漂亮的小胡子.卷发,修剪得很整齐;西装,非常合身,洁白的衬衫,打着领带.体现了他作为德国人的精确、严肃的一面.这张照片中,他居左,拉着小提琴.胡尔维茨(Adolf Hurwitz,1859—1919,德,瑞)站在中间,右手扬起指挥棒,似在指挥.右边与爱因斯坦对坐的是胡尔维茨的女儿莉西(Lisi),也拉小提琴,面前还放着乐谱.

第二张照片就是胡尔维茨的标准照.戴着金丝眼镜,两眼很大,炯炯有神,头发虽然白了,胡子却很浓很黑.胡尔维茨是一位优秀的数学家,研究领域非常宽广,成果很多.不仅如此,他还是一位真正的伯乐.他是希尔伯特(David Hilbert,1862—1943)的老师和朋友,对希尔伯特帮助很大.1914年秋,波利亚到位于苏黎世的EIH(瑞士联邦工学院),就是胡尔维茨发出的邀请.波利亚在这里一直工作到1940年.

在胡尔维茨的最后五年(1914—1919),波利亚经常到他家拜访,坐在书房里讨论数学(很少谈其他的事),直到胡尔维茨抽完雪茄.然后就外出散步,边走边聊,继续前面的讨论.由于胡尔维茨身体不好,大多走平路.如果走山路,波利亚就慢慢地陪着他.波利亚与胡尔维茨合作发表过一篇论文,后来又担任出胡尔维茨选集的大部分工作.虽然交往只有五年,波利亚觉得他与胡尔维茨的联系很深,对胡尔维茨非常感激.

接下去是胡尔维茨与波利亚的岳父(一位物理教授)给波利亚的一些照片,大部分是波利亚的前辈数学家.其中有:法

国的庞加莱(Jules Henri Poincaré,1854—1912),这是科学界的一位巨人.他有一个堂弟(Raymond Poincaré)任过法国总统,但早就被人遗忘了.而庞加莱的名字却永远留在人们心中(例如P.S.Aleksamdrov 的文章《庞加莱与拓扑》中说"庞加莱与拓扑的关系,可以用一句话来回答:他创造了它.").瑞典的米太格-莱夫勒(Gösta Mittag-Leffler,1843—1921),他创办了著名的瑞典《数学学报》,不仅自己是一流的数学家,而且支持过柯瓦列夫斯卡娅与康托尔.照片中的米太格-莱夫勒很英俊,传说就是因为他,诺贝尔不设数学奖.德国的数论专家兰道(Edmund Georg Hermann Landau,1877—1938)和应用数学专家龙格(Carl Runge,1856—1927).艾森斯坦(Feridinand Gothold Max Eisenstein,1823—1852,德),学过大学代数的人都知多项式既约的艾森斯坦判别法,高斯认为他是三个划时代的数学家之一(另两个是阿基米德,牛顿),但不幸早夭.克莱因(Christian Felix Klein,1849—1925,德),几何学家,以爱尔朗根纲领闻名.这是他年轻时的照片,胡子已经很多,但还没有后来人们所说的那种"帝王般的威严".两张希尔伯特,一张年轻,一张年老.年轻的面向右侧,年老的面向左侧,但神情基本一样,只是前一张头发多胡子少,后一张头发少胡子多.相册中还有一张希尔伯特戴礼帽,穿大衣的照片(第23张).希尔伯特的23个问题在很大程度上影响了20世纪数学的发展.天才的闵可夫斯基(Hermann Minkowski,1864—1909,德)在哥尼斯堡(后改名为加里宁格勒,苏联解体后不知是否恢复原名)的照片,他在创造力正旺盛的时候,因阑尾炎而英年早逝,真是整个数学界的损失.许瓦尔兹(Hermann Amandus Schwarz,1843—1921,德),他在柏林大学继承了外尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass,

1815—1897)的位置. 韦伯(Heinrich Weber, 1842—1913, 德),德国数学会的创始人之一,他写的《代数》是一本有名的教科书. 林德曼(Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852—1939,德),他证明了 π 是超越数. 从这组照片可以看出当时德国数学实力之强,尤其是哥廷根大学,确实无与伦比. 此外,也可以看到当时的一些风尚,如庞加莱,闵可夫斯基,希尔伯特,林德曼都戴夹鼻眼镜,用一根金属练子系住.

第 16 张是费叶尔(Leopold Fejér, 1880—1959,匈). 他是许瓦尔兹的学生,被誉为匈牙利数学之父. 他成名甚早,年轻时风度翩翩,喜欢音乐,钢琴弹得很好. 他吸引了不少年轻人,经常带领他们在咖啡馆高谈阔论,弹吉它,拉提琴. 他的门人众多. 在这本相册中出现的就有 Mihäly Fekete(1866—1957), Otto Szász(1884—1952),舍贵(Gabor Szegö, 1895—1985),波利亚本人以及比他们晚很多年的厄尔迪什(Paul Erdös, 1913—1996). 费叶尔的主要工作在 20 岁时即已完成,后来的研究往往是原来的推广,似乎江郎才尽. 相册中他出现 7 次. 起先是早年的,戴着礼帽,执着文明棍,漫步在布达佩斯街头,十分潇洒. 后来便渐渐老了,仍旧戴着礼帽(有一张不戴礼帽的,头发已很稀疏),文明棍换成了阳伞,少了当年那股英气,大概是由绚烂归于平淡了. 不过,他说话仍很风趣. 1922 年德国数学会在莱比锡开会,波利亚的妻子拍了几张照(相册的第 35,36,37 张),其时波利亚还未当上正教授,费叶尔便揶揄道:"多么好的妻子啊,将正教授在大马路上排成一列,汽车可以从他们身上开过去. 这样,他的丈夫就有职位了(很多国家的教授数目是固定的,不缺不补)".

英国的哈代(Godfrey Harold Hardy, 1877—1947),也是波利亚的一位知音(我国数学家华罗庚,当年负笈英伦,就是

为了学习哈代的方法).1924 年,由于哈代的推荐,波利亚获得洛克菲勒基金的资助到伦敦访问,并与哈代、李特尔伍德(John Edensor Littlewood,1885—1977)合作,完成了著名的《不等式》,1934 年由剑桥大学出版社出版.哈代是个美男子,却不喜欢照相.他经常旅行,一到旅馆就把镜子全部蒙上,说:"我太丑了,不能自己看自己."这本相册中有 4 张哈代的照片(第 40,41,65,93 张),Vladimir Drobot 评论说:"波利亚那里哈代的相片,比已经问世的还多."其中最后一张是晚年的哈代,人已垂垂老矣!哈代的故事很多,可参见波利亚所写的《我认识的数学家》一文(美国数学月刊,1969 年 76 期,746—753 页).

相片中舍贵出现次数最多(仅次于波利亚本人),共有 10 张,从青年到老年,其中还有他的妻子和小儿子.舍贵是波利亚的挚友.1925 年两人合作完成两卷《数学分析中的定理和问题》,由 Springer-Verlag 出版社出版.这一经典著作被誉为"造就了两代数学家".它的编排亦很新颖,不是按照题目的内容,而是按照解法分类.1940 年欧洲战云密布,波利亚不得不渡过大西洋来到美国,先在东部的 Brown 大学与 Smith 学院短期任教,后来即因舍贵之邀去斯坦福(Stanford)大学(其时舍贵任数学系主任),并一直在那里工作.第 98 张照片是波利亚 60 岁,波利亚夫妇与舍贵夫妇的合影,可见两人友谊之深.

外尔(Hermann Wyle,1885—1955,德,瑞,美),在相册中出现了 6 次.他也是一位天才的数学家,希尔伯特的学生,后来成为直观主义学派的领袖.外尔的研究范围极广(甚至包括相对论),他在 1913 年完成了黎曼面的经典著作,引入复流形等新概念.据说有一次,我国一位拓扑学家在飞机上与他相

遇，向他请教一个久思而未得的问题．外尔稍作思索便说大概如何如何．下机后照他的路子去做，果然解决了．外尔与波利亚虽在 ETH 共事多年，但性格不太相投，数学上的接触不多．波利亚认为外尔喜欢最大限度的一般，而他则对特殊情况很感兴趣．但外尔去世后，波利亚专门写了两篇纪念文章．

很多人以为数学家都是整天窝在 6 平方米的小屋子里，埋头计算，足不出户的书呆子．其实大多数数学家并非如此．相册中的丹麦数学家玻尔（Harald Bohr，1887—1951），足球就踢得很好，而且是国家队队员（他的哥哥是著名物理学家，诺贝尔奖获得者 Niels Bohr），而霍普夫（Heinz Hopf，1894—1971，德，瑞）则喜欢滑雪（相册中有他在雪山上的照片），波利亚认为霍普夫是他认识的数学家中最优秀的三名之一．第 66 张照片是 Paul Koebe（1882—1945，德）与 Egon Ulrich（1902—1957，德）在登山，第 63 张是阿达玛（Jacques Salomon Hadamard，1865—1963，法）在海滩脱靴子，准备涉水．第 83 张则是外尔在玩跷跷板！

不少数学家多才多艺，第 114 张就是 Isaac J．Schoenberg（1903—?，罗，美）在拉小提琴（他是兰道的女婿），而第 37 张中的豪斯道夫（Felix Hausdorff，1868—1942，德）还会写剧本，不但写了，而且剧本正式演出，非常成功．

波利亚本人，兴趣更是广泛，曾经在大学学习语言与文艺两年，通过考试，取得了证书，可以教授拉丁文与匈牙利文（但他从未用过这一证书）．他喜欢海涅的诗，喜欢物理，也喜欢哲学．他原先数学并不算突出，曾参加匈牙利数学竞赛（即 Eötvös 考试．Loránd Eötvös 男爵是他在布达佩斯大学的物理老师），但未交卷．后来一位哲学家说服他："学数学与物理可帮助他理解哲学．"于是，他最终选择了数学．他认为"学物

理，我不够好．学哲学，我又太强．数学，在这两者之间”．但他对语言一直饶有兴趣．他在瑞士说德语的部分工作，他的妻子则生长于瑞士说法语的部分．后来到英、美，又说英语．几种语言在家中地位平等．他能用匈、法、德、意、英、丹麦等 12 种文字写数学论文．他所写的《数学的发现》、《怎样解题》等著作，文字优美，妙语连珠，令人百读不厌．

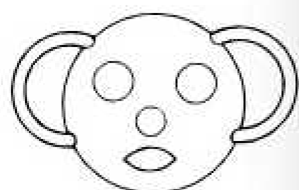
相册中，波利亚还介绍了不少数学家的轶事．如阿达玛，有一次乘坐火车，他十分疲劳想安静一下，可是车厢里很吵，他便出了一个很难的数学题，车厢里顿时静了下来，他便安然入睡．

又如维纳（Norbert Wiener，1894—1964，美），这位神童（他曾写过一本自传《昔日神童》）是控制论的创始人，但他对自己的工作似乎缺乏信心．有一次（1942 年在波士顿）他驾车去车站接波利亚，回来时，他在十字路口将车停住，突然问：“波利亚，我真是一个好的数学家吗？”波利亚一时不知如何回答．维纳曾来过我国，在清华大学任教一年．

冯•诺依曼（John von Neumann，1903—1957，匈，德，美）是波利亚的学生．相册中仅有一张他的合影（照片上另一人是 Abraham Taub，1911—?，美）．他才思敏捷．在苏黎世的一次讨论班上，波利亚提到一个尚未证明的命题，说：“可能很难．”过了五分钟，诺依曼举起手来，然后上黑板写出了证明．“我真服了他，”波利亚说．

很多人喜欢开贝塞尔－汉根（Erich Bessel－Hagen，1898—1946，德）的玩笑，喀瑞雅托（Béla von Kerékjarto，1848—1946，匈）写了一本《拓扑导引》，其中的索引列了贝塞尔－汉根的大名，但如果按照所标页码去找，在该页找不到贝塞尔－汉根，而只有一个拓扑图形的解释．这个图如下：

第 18 张照片是 8 个人的合影，贝塞尔－汉根站在第三排右边．如果和上述图形对照一下，真有几分相像．喀瑞雅托坐在第二排左边．他比贝塞尔－汉根足大了五十岁，相貌十分俊秀（甚至有点女性化）．相册中后来又出现几次，真的老了（他与贝塞尔－汉根在同一年去世），和这张简直判若两人．



数学家中富有的不多，因为研究数学挣不了多少钱．不过，也有本来就富裕的人研究数学．兰道就是一个，他的研究做得很好．哥廷根大学发行一套明信片，每张一位著名教授的头像，兰道就在其中．第 14 张照片拍的就是这张明信片，上面的兰道相貌堂堂．后来老了，头上童山濯濯，显得很大，有点像漫画《父与子》中的父亲．他是个很细致的人，一张很大的办公桌，每天工作结束时都整理得干干净净．他的文章也可以看出这一风格．第 64 张照片是兰道与阿达玛在热烈地讨论．这是 1932 年国际数学家会议时拍的．其时，兰道 55 岁，阿达玛 67 岁，他们的创造力仍很旺盛．

另一个富人是第 70 张的依瑞拉（Alfred Errera，1886—1960，比），他是兰道的学生，百万富翁，人也很富态．依瑞拉在家请客十分隆重：上一道又一道的菜，喝种种不同的酒，众多的仆役往来奔走……有一次他请了勒维（Paul Levy，1886—1971，法）吃晚饭．第二天又见到勒维，依瑞拉很客气地说："昨天晚上，我很荣幸．"不料，勒维却是个心不在焉的人，竟然反问道："昨天晚上，你在哪里啊？"第 71 张是多年后勒维在斯坦福大学讲课的照片，满黑板都是数学式子．

普林塞姆（Alfred Pringsheim，1850—1941，德，瑞），原为慕尼黑的教授，相册里有三张他的照片（第 24，25 与 62 张）．

第 25 张是他在自己庭院的阳台上，周围繁花似锦，可以看出他是个真正有钱的人．著名作家托玛斯·曼（Thomas Mann，1875—1955，德，美，诺贝尔文学奖得主）是他的女婿，写了一本小说《Wälsungenblut》，其中有一对孪生兄妹相爱，似乎是指音乐家瓦格纳（Richard Wagner，1813—1883，德）的歌剧《尼伯龙的指环》中的人物 Siegmund 与 Sieglinde（他们正是孪生兄妹）．但普林塞姆的家庭立即意识到这也可能影射曼的妻子与她的孪生哥哥．因此，普林塞姆立即买下所有的书，并要曼保证不再重印（但后来曼又重印了）．普林塞姆是犹太人，在希特勒上台后不得不逃到瑞士．他带了很多珍贵的油画，后来无以为生，便陆续从墙上取下来变卖糊口．有人从手到口，他可是从墙上到嘴里了．

更悲惨的是布鲁门萨尔（Otto Blumenthal，1876—1944，德），他是希尔伯特的学生，长期担任《数学年鉴》的主编．后来从德国逃到荷兰，仍被德国民族社会主义党（一译国家社会主义党，简称纳粹党）抓住，死在集中营里．他的照片（第 26 张）应摄于较早时期，但已是一副愁苦的样子．一手拿着不新的礼帽．一手拄着阳伞，额上皱纹很明显，小胡子，不带眼镜，但眼睛很小，面容憔悴，皮鞋似乎未擦干净，有泥．没精打采地站在一间破旧的房屋门口，门关着，门旁边有直立的排水管道，街面是水泥条铺的，街与房屋之间有石头露出．一切的一切，似乎已在预示相片中人物将要遭遇不幸．

接下去的一张照片是罗生萨尔（Arthur Rosenthal，1887—1959，德，美）．两人名字都以“thal”结尾，所以普林塞姆俏皮地说：“罗生萨尔是布鲁门萨尔的特例．”但他的运气显然比布鲁门萨尔好，后来去了美国，最后在普度（Purdue）大学任教，躲过了纳粹党的迫害．

在二战中，与纳粹党合作的数学家有比勃巴赫(Ludwig Bieberbach，1886—1982，德). 他鼓吹德意志数学，竟然认为其他国家的数学受到犹太人的精神污染，应当排斥. 但在二战之前他还没有这样极端排犹. 第34张是他一个人的照片，人比较瘦，个子也不高. 第57张是1932年他与波兰数学家谢尔品斯基(Waclaw Sierpiński，1882—1969)讨论问题. 谢尔品斯基似比比勃巴赫大出两号，又站在两层台阶之上，更显出比勃巴赫的矮小. 在复分析中，有一个著名的比勃巴赫猜测，直到1984年才被普度大学的Louis de Branges解决. 比勃巴赫虽然活到九十多岁，却早呜呼两年，未能见到这一猜测的解决.

相册中的名人轶事还有很多，但本文已经太长，应当打住了. 作为结束，这里再列出相册中一些人物的名字：

Blaschke，Borel，Brouwer，Caratheodory，Cartan，Davenport，de Bruijn，Fisher，Grossmann，Haar，Hecke，Hille，Ingham，Knopp，Kuratowski，D. Lehmer 与 E. Lehmer，Menger，Montel，Nevanlinna，Noether，Ostrowski，Perron，Plancherel，Rademacher，Renyi，Riesz，J. Robinson 与 R. Robinson，Schur，Sieyel，Spencer，Tietze，Uspensky，Vallée - Poussin，van der Corput，Veblen，Zygmund

等等. 这些人，对于学数学的人来说，确实是“久闻大名，如雷贯耳”.